МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

УДК 517.95 Научная статья
DOI: 10.35330/1991-6639-2024-26-1-69-77
EDN: MPQWLS

Краевая задача для нагруженного параболического уравнения дробного порядка

М. М. Кармоков, Ф. М. Нахушева, М. Х. Абрегов

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова
360004, Россия, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173

Аннотация. В статье рассматривается вторая краевая задача для нагруженного параболического уравнения с оператором дробного интегро-дифференцирования Римана – Лиувилля. Доказана однозначная разрешимость второй краевой задачи. Методом функции Грина, используя теорию потенциала простого слоя, задача редуцируется к системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода.

Ключевые слова: краевые задачи, параболические уравнения, оператор дробного интегро-дифференцирования, нагруженное уравнение, регулярное решение

Поступила 01.02.2024, одобрена после рецензирования 09.02.2024, принята к публикации 12.02.2024

Для цитирования. Кармоков М. М., Нахушева Ф. М., Абрегов М. Х. Краевая задача для нагруженного параболического уравнения дробного порядка // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2024. Т. 26. № 1. С. 69–77. DOI: 10.35330/1991-6639-2024-26-1-69-77

MSC: 35K20 Original article

Boundary value problem for loaded parabolic equations of fractional order

M.M. Karmokov, F.M. Nakhusheva, M.Kh. Abregov

Kabardino-Balkarian State University named after Kh.M. Berbekov
360004, Russia, Nalchik, 173 Chernyshevsky street

Abstract. The article considers the second boundary value problem for a loaded parabolic equation with a fractional Riemann – Liouville integro-differentiation operator. The unambiguous solvability of the second boundary value problem is proved. Using the Green function method with the theory of the potential of a simple layer, the problem is reduced to a system of Volterra integral equations of the second kind.

Keywords: boundary value problems, parabolic equations, fractional integro-differentiation operator, loaded equation, regular solution

Submitted 01.02.2024, approved after reviewing 09.02.2024, accepted for publication 12.02.2024

For citation. Karmokov M.M., Nakhusheva F.M., Abregov M.Kh. Boundary value problem for loaded parabolic equations of fractional order. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS.* 2024. Vol. 26. No. 1. Pp. 69–77. DOI: 10.35330/1991-6639-2024-26-1-69-77

Введение

Как известно, исследования математических моделей физико-биологических фрактальных процессов и связанных с ними задач, таких как задачи прогноза и регулирования уровня грунтовых вод, содержания влаги и соли в почвогрунтах на мелиорируемой территории и др., приводят к качественно новому классу дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, получивших название нагруженных уравнений. В связи с этим исследование этих уравнений представляет большой как теоретический, так и практический интерес.

В монографии А. М. Нахушева [1] приведена подробная библиография по нагруженным уравнениям, в том числе по различным применениям нагруженных уравнений, как метода исследования задач математической биологии, математической физики, математического моделирования нелокальных процессов и явлений, механики сплошных сред с памятью.

Данная работа посвящена исследованию краевых задач для разрывно-нагруженных параболических уравнений с дробной производной.

В области $D=\{(x,t): 0<x<l,\ 0<t<T\}$ рассмотрим разрывно-нагруженное уравнение

$$Lu=\sum_{j=1}^{n_k} a_j^k\,(x,t) D_{0t}^{\alpha_j^k} K_j^k(x,t) u\left(x_j^k,t\right),\ \ T_k<t\leq T_{k+1}, \tag{1}$$

где $k=0,1,2,\dots,N,\ 0=T_0<T_1<\dots<T_N=T,\ \alpha_{n_k}^k<\alpha_{n_{k-1}}^k<\dots<\alpha_1^k,\ 0<x_1^k<x_2^k<\dots x_{n_k}^k<l,\ Lu=a(x,t)u_{xx}+b(x,t)u_x+c(x,t)u-u_t,\ D_{0t}^{\alpha}$ – оператор дробного интегро-дифференцирования порядка α [2].

Уравнение (1) относится к классу уравнений, предложенных в [3]. В работе [4] методом функции Грина исследована смешанная краевая задача для нагруженного уравнения теплопроводности. Работа [5] посвящена локальным и нелокальным краевым задачам для нагруженных параболических уравнений. Краевые задачи для уравнений в частных производных дробного порядка, включая диффузионно-волновые уравнения, рассмотрены в монографии [6]. В работе [7] получены решения краевых задач для нагруженного диффузионно-волнового уравнения с дробной производной. Численному решению первой краевой задачи для нагруженного уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами посвящены работы [8, 9].

Вторая краевая задача

В области D для уравнения (1) рассмотрим краевую задачу:

$$u(x,0)=\varphi(x), \tag{2}$$

$$\begin{cases} u_x(0,t)+\beta_1(t)u(0,t)=\gamma_1(t), \\ u_x(l,t)+\beta_2(t)u(l,t)=\gamma_2(t), \end{cases} \tag{3}$$

где $\beta_1(t),\beta_2(t),\gamma_1(t),\gamma_2(t)\in[0,T]$.

Решением второй краевой задачи (1)–(3) будем называть функцию $u(x,t)$, непрерывную в D, регулярную в $D_i=\{(x,t): 0<x<l,\ T_{i-1}<t<T_i\}$ $(i=1,2,\dots,N)$, удовлетворяющую условиям (2), (3).

Теорема 1. Пусть выполнены условия:

1) коэффициенты $a(x,t), b(x,t), c(x,t)$ в D удовлетворяют неравенствам

$$a(x,t)\geq\lambda_0>0,$$

$$|a(x',t)-a(x,t)| \le A|x'-x|^{\lambda},$$

$$|b(x',t)-b(x,t)| \le A|x'-x|^{\lambda},$$

$$|c(x',t)-c(x,t)| \le A|x'-x|^{\lambda},$$

$$|a(x,t')-a(x,t)| \le A|t'-t|^{\lambda},$$

где A, λ_0 и λ – некоторые положительные постоянные.

2) a_j^k, $j=1,2,\dots,n_k$, $k=0,1,\dots,N$ непрерывны в $\overline{D}$ по совокупности переменных x, t и удовлетворяют по t условию Гельдера, а $K_j^k(x,t)$ – непрерывны в $\overline{D}$, $\varphi(x) \in C[0,l]$ и $\lambda^k < 0$. Тогда существует единственное решение задачи (1)–(3).

Доказательство. Пусть в уравнении (1) $N=2$. Сначала мы докажем теорему в области D_1.

Пусть существует решение задачи (1)–(3) в области D_1. Будем искать $u(x,t)$ в виде:

$$u(x,t) = \int_0^t [Z(x,t;0,\tau)\Psi_1(\tau) + Z(x,t;l,\tau)\Psi_2(\tau)]d\tau + \int_0^l Z(x,t;\xi,0)\varphi(\xi)d\xi -$$

$$-\int_0^t d\tau \int_0^l Z(x,t;\xi,\tau) \sum_{j=1}^{n_0} a_j^0(\xi,\tau) D_{0\tau}^{\alpha_j^0} K_j^0(\xi,\tau) u\left(x_j^0,\tau\right) d\xi, \qquad (4)$$

где

$$\frac{\Psi_1(t)}{2} = A(t) - \int_0^t d\tau \int_0^l M_1(0,t;\xi,\tau) \sum_{j=1}^{n_0} a_j^0(\xi,\tau) D_{0\tau}^{\alpha_j^0} \left[K_j^0(\xi,\tau) u\left(x_j^0,\tau\right)\right] d\tau -$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^t M_{1,n}(0,t;0,\tau) \left[\int_0^\tau d\tau_1 \int_0^l M_1(0,t;\xi,\tau_1) \sum_{j=1}^{n_0} a_j^0(\xi,\tau_1) D_{0\tau_1}^{\alpha_j^0} K_j^0(\xi,\tau_1) u\left(x_j^0,\tau_1\right) d\xi \right] d\tau - \right.$$

$$\left. -\int_0^t M_{2,n}(0,t;l,\tau) \left[\int_0^\tau d\tau_1 \int_0^l M_2(l,\tau;\xi,\tau_1) \sum_{j=1}^{n_0} a_j^0(\xi,\tau_1) D_{0\tau}^{\alpha_j^0} K_j^0(\xi,\tau_1) u\left(x_j^0,\tau_1\right) d\xi \right] d\tau \right\},$$

$$\frac{\Psi_2(t)}{2} = B(t) - \int_0^t d\tau \int_0^l M_2(l,t;\xi,\tau) \sum_{j=1}^{n_0} a_j^0(\xi,\tau) D_{0\tau}^{\alpha_j^0} \left[K_j^0(\xi,\tau) u\left(x_j^0,\tau\right)\right] d\tau -$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^t M_{1,n}(l,t;0,\tau) \left[\int_0^\tau d\tau_1 \int_0^l M_1(0,t;\xi,\tau_1) \sum_{j=1}^{n_0} a_j^0(\xi,\tau_1) D_{0\tau_1}^{\alpha_j^0} K_j^0(\xi,\tau_1) u\left(x_j^0,\tau_1\right) d\xi \right] d\tau - \right.$$

$$\left. -\int_0^t M_{2,n}(l,t;l,\tau) \left[\int_0^\tau d\tau_1 \int_0^l M_2(l,\tau;\xi,\tau_1) \sum_{j=1}^{n_0} a_j^0(\xi,\tau_1) D_{0\tau_1}^{\alpha_j^0} K_j^0(\xi,\tau_1) u\left(x_j^0,\tau_1\right) d\xi \right] d\tau \right\},$$

$$A(t) = \int_0^1 M_1(0,t;\xi,\tau)\varphi(\xi)\,d\xi +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_0^t M_{1,n}(0,t;0,\tau)\left[\int_0^l M_1(0,\tau;\xi,0)\varphi(\xi)d\xi - \gamma_1(\tau)\right] -\right.$$

$$\left.-\int_0^t M_{2,n}(0,t;l,\tau)\left[\int_0^l M_2(l,\tau;\xi,0)\varphi(\xi)d\xi - \gamma_2(\tau)\right]\right\}d\tau - \gamma_1(\tau),$$

$$B(t) = \int_0^l M_2(l,t;\xi,0)\varphi(\xi)\,d\xi +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\left\{\int_0^t M_{1,n}(l,t;0,\tau)\left[\int_0^l M_1(0,\tau;\xi,0)\varphi(\xi)d\xi - \gamma_1(\tau)\right] -\right.$$

$$\left.-\int_0^t M_{2,n}(l,t;l,\tau)\left[\int_0^l M_2(l,\tau;\xi,0)\varphi(\xi)d\xi - \gamma_2(\tau)\right]\right\}d\tau - \gamma_2(\tau),$$

$$M_{k,1} = M_k,$$

$$M_{k,n+1}\big(\xi_k,t;\xi_j,\tau\big) = \int_0^t M_k\big(\xi_k,t;\xi_j,\sigma\big)M_{k,n}\big(\xi_j,\sigma;\xi_k,\tau\big)d\tau,$$

$$k = 1,2;\quad j = 1,2;\quad \xi_1 = 0;\quad \xi_2 = 0.$$

При $x \to x_i^0$ $(i = 1,2,\dots,n_0)$ из (4) имеем

$$u(x_i^0,t) = \int_0^t N_i(t,\eta)u(x_i^0,\eta)d\eta + F_i(t), \tag{5}$$

где

$$N_i(t,\eta) = -2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_\eta^t Z(x_i,t;0,\tau)\int_0^l\int_\eta^\tau [M_{1,n}(0,\tau;\xi,\tau_1)M_1(0,\tau_1;\xi,\eta) +\right.$$

$$+M_{2,n}(0,\tau;l,\tau_1)M_2(l,\tau_1;\xi,\tau)]\sum_{j=1}^{n_0} a_j^0(\xi,\tau_1)D_{0\tau_1}^{\alpha_j^0}K_j^0(\xi,\tau_1)u\big(x_j^0,\tau_1\big)d\tau_1\,d\xi +$$

$$+\int_\eta^t Z(x_i,t;l,\tau)\int_0^l\int_\eta^\tau [M_{1,n}(l,\tau;0,\tau_1)M_1(0,\tau_1;\xi,\eta) +$$

$$+M_{2,n}(l,\tau;l,\tau_1)M_2(l,\tau_1;\xi,\eta)]\sum_{j=1}^{n_0}a_j^0(\xi,\tau_1)D_{0\tau_1}^{\alpha_j^0}K_j^0(\xi,\tau_1)u\big(x_j^0,\tau_1\big)\ d\tau_1 d\xi\Bigg\}$$

$$F_i(t)=\int_0^t[Z(x_i,t;0,\tau)A(\tau)+Z(x_i,t;l,\tau)B(\tau)]d\tau.$$

Для $Z(x_i,t;\xi,\tau)$ и $M_k(x,t;\xi,\tau)$ имеем следующие оценки:

$$|Z(x,t;\xi,\tau)|\leq\frac{c}{(t-\tau)^{\mu}|x-\xi|^{1-2\mu}},\ \ 1-\lambda/2<\mu<1,$$

$$|M_k(x,t;\xi,\tau)|\leq\frac{c}{(t-\tau)^{\mu}|x-\xi|^{1-2\mu-\lambda}},\ \ k=1,2. \tag{6}$$

Докажем сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^l\int_\eta^\tau M_{k,n}(\xi_k,t;\xi_i,\tau_1)M_k(\xi_i,\tau_1;\xi,\eta)d\xi d\tau_1. \tag{7}$$

Для этого воспользуемся следующей леммой [10]:

Лемма 1. Если $0<a<1,\ 0<b<1,$ то $\forall\ x\in[0,l], z\in[0,l], x\neq z$:

$$\int_0^l\frac{dy}{|x-y|^a|y-z|^b}\leq\begin{cases}c|x-\xi|^{1-a-b}, & \text{если }\ a+b>1,\\ c, & \text{если }\ a+b<1.\end{cases}$$

Используя лемму 1 и неравенство (6), находим, что

$$\left|M_{k,2}(x,t;\xi,\tau)\right|\leq\frac{c}{(t-\tau)^{\mu+(\mu-1)}|x-\xi|^{2-2\mu-\lambda+(1-2\mu-\lambda)}}.$$

Поскольку $\mu<1$ и $1<2\mu+\lambda$, особенность в $M_{k,2}$ более слабая, чем в $M_{k,1}$=M_k.

Оценивая аналогичным образом $M_{k,3},\ M_{k,4}$ и т. д., мы дойдем до m_0, для которого

$$\left|M_{k,m_0}(x,t;\xi,\tau)\right|\leq c. \tag{8}$$

Докажем далее методом индукции по l_0, что

$$\left|M_{k,m_0}(x,t;\xi,\tau)\right|\leq c\frac{[c_2(t-\tau)^{1-\mu}]^{l_0}}{\Gamma[(1-\mu)l_0+1]}, \tag{9}$$

где $c_1,\ c_2$ – некоторые постоянные, а $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера. Предположим, что (9) имеет место для некоторого целого l_0 и с помощью (6) получим

$$\left|M_{k,l_0+m_0+1}\right|\leq cc_1\frac{c_2^{l_0}}{\Gamma[(1-\mu)^{l_0+1}]}\int_0^t(t-\sigma)^{-\mu}(\sigma-\eta)^{(1-\mu)l_0}d\sigma.$$

Подставляя $Y=(\sigma-\tau)/(t-\tau)$, используя формулу

$$\int_0^1 (1-y)^{a-1}y^{b-1}dz=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(1+b)}$$

и выбирая подходящим образом постоянную c_2, получим формулу (9) для всех $l_0=1$. Но для $l_0=0$ (9) совпадает с (8). Отсюда следует доказательство (9). Из (9) следует, что ряд (7) сходится.

В дальнейшем понадобятся следующие неравенства:

$$|Z(x,t;\xi,\tau)|\le c(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\lambda_0(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}}, \tag{10}$$

$$\left|\frac{\partial Z(x,t;\xi,\tau)}{\partial x}\right|\le c(t-\tau)^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{\lambda_0(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}}.$$

Преобразуем (10) в виде

$$|Z(x,t;\xi,\tau)|\le c(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\lambda_0(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}}=$$

$$=c(t-\tau)^{-\mu}(x-\xi)^{\mu-1/2}\left[\frac{(x-\xi)^2}{(t-\tau)}\right]^{\frac{1}{2}-\mu}e^{-\frac{\varepsilon\lambda_0(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}}e^{\frac{(1-\varepsilon)(x-\xi)^2\lambda_0}{4(t-\tau)}}.$$

Для $0<A<\infty$ получим следующее неравенство

$$|Z(x,t;\xi,\tau)|\le c(t-\tau)^{-\mu}(x-\xi)^{1-2\mu}e^{-\frac{\bar\lambda_0(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}}$$

для любых $\bar\lambda_0<\lambda_0$ и $0<\mu\le\frac{1}{2}$.

Аналогично доказывается, что

$$\left|\frac{\partial Z(x,t;\xi,\tau)}{\partial x}\right|\le c(t-\tau)^{-\mu_1}(x-\xi)^{2\mu_1-\frac{3}{2}}e^{-\frac{\bar\lambda_0(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}}.$$

Следовательно,

$$\left|M_{k,2}(x,t;\xi,\tau)\right|\le c(t-\tau)^{-\mu}(x-\xi)^{2\mu-\frac{3}{2}}e^{-\frac{\bar\lambda_0(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}}.$$

Пусть $\mu_1=\frac{3}{4}$. Тогда

$$\left|M_{k,2}(x,t;\xi,\tau)\right|=\left|\int_0^t\int_0^l M_k(x,t;y,\sigma)M_{k,1}(y,\sigma;\xi,\tau)d\xi d\sigma\right|\le$$

$$\le c\int_0^t\int_0^l (t-\tau)^{-\mu_1}e^{-\frac{\bar\lambda_0(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}}(\sigma-\tau)e^{-\lambda_0(\xi-y)}d\xi d\tau. \tag{11}$$

Сделаем подстановку:

$$\rho = \left(\bar{\lambda}_0 \frac{t-\tau}{t-\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\xi - y}{2(\sigma - t)^{\frac{1}{2}}} + \left(\bar{\lambda}_0 \frac{\sigma-\tau}{t-\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{y - x}{2(t - x)^{\frac{1}{2}}}.$$

Так как

$$\frac{\bar{\lambda}_0 (x-\xi)^2}{4(t-\sigma)} + \frac{\bar{\lambda}_0 (y-\xi)^2}{4(t-\sigma)} = \frac{\bar{\lambda}_0 (x-\xi)^2}{4(t-\sigma)} + \rho^2,$$

то из (11) имеем

$$\left|M_{k,2}(x,t;\xi,\tau)\right| = c \int\limits_0^t (t-\sigma)^{\frac{1}{2}-\mu_1} (\sigma - t)^{\frac{1}{2}-\mu_1} (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} d\tau.$$

После подстановки $(t-\sigma)/(t-\tau) = \eta$ получим

$$\left|M_{k,2}(x,t;\xi,\tau)\right| \leq \frac{2\pi^{\frac{1}{2}}}{h} c e^{-\frac{\bar{\lambda}_0 (x-\xi)^2}{4(t-\tau)}},$$

$$\int\limits_0^1 \eta^{-\frac{1}{4}} (1-\eta)^{-\frac{1}{4}} d\eta \leq cB\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) e^{-\frac{\bar{\lambda}_0 (x-\xi)^2}{4(t-\tau)}},$$

где $B(\alpha, \beta)$ – бета-функция.

Легко установить, что все M_{k,m_0} $(m_0 > z)$ – тоже непрерывные функции (x,t) равномерно по отношению к (ξ,τ), если $t - \tau \geq c > 0$, и непрерывные функции (ξ,τ) равномерно по отношению к (x,t), если $t - \tau \geq c > 0$. Отсюда следует, что $M_{k,n}(x,t;\xi,\tau)$ – непрерывная функция по совокупности переменных $(x,t;\xi,\tau)$, а следовательно, и ряд (7) – также непрерывная функция.

Рассмотрим интеграл

$$I(t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^l M_i(x,t;\xi,\tau) \sum_{j=1}^{n_0} a_j^0(\xi,\eta) \frac{1}{\Gamma(-\alpha_j)} \int\limits_0^{\tau_1} \frac{K_j^0(\xi,\tau_1) u\left(x_j^0, \tau_1\right)}{(\tau - \tau_1)^{1+\alpha_j}} d\tau_1.$$

Так как $\alpha_j < 0$, то из (6) имеем, что $I(t)$ – прерывная функция. Следовательно, система интегральных уравнений (5) имеет единственное непрерывное решение. Подставляя $u(x_i^0, t)$ в (4), с учетом, что краевая задача (2), (3) имеет единственное решение для уравнения $Lu = f(x,t)$ [10], получаем однозначное решение в D_1.

Так как $u(x, T_1) \in C[0, l]$, то аналогично получается решение задачи (1)–(3) и в области D_2. Теорема доказана.

Заключение

Таким образом, в данной работе доказана однозначная разрешимость второй краевой задачи для нагруженного параболического уравнения дробного порядка. Полученные результаты важны для развития теории краевых задач для уравнений в частных производных дробного порядка, в том числе нагруженных уравнений параболического типа, а также математического моделирования различных процессов и систем с распределенными параметрами, имеющих фрактальную пространственно-временную структуру.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012. 232 с.
2. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.
3. *Нахушев А. М.* О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. № 1. С. 103–108.
4. *Дикинов Х. Б., Керефов А. А., Нахушев А. М.* Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения теплопроводности // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. С. 177–179.
5. *Кармоков М. М.* Локальные и нелокальные краевые задачи для разрывно-нагруженных параболических уравнений: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Нальчик, 1991. 87 с.
6. *Псху А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.
7. *Геккиева С. Х.* Смешанные краевые задачи для нагруженного диффузионно-волнового уравнения // Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. 2016. Выпуск 42. № 6 (227). С. 32–35.
8. *Нахушева Ф. М., Лафишева М. М., Кармоков М. М., Джанкулаева М. А.* Численный метод решения краевой задачи для параболического уравнения с дробной производной по времени с сосредоточенной теплоемкостью // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2018. № 5 (85). С. 34–43.
9. *Бештоков М. Х., Водахова В. А., Исакова М. М.* Приближенное решение первой краевой задачи для нагруженного уравнения теплопроводности // Математическая физика и компьютерное моделирование. 2023. Т. 26. № 4. С. 5–17.
10. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968. 427 с.

REFERENCES

1. Nakhushev A.M. *Nagruzhennyye uravneniya i ikh primeneniye* [Loaded equations and their application]. Moscow: Nauka, 2012. 232 p. (in Russian)
2. Nakhushev A.M. *Uravneniya matematicheskoy biologii* [Equations of mathematical biology]. Moscow: Vysshaya shkola, 1995. 301 p. (in Russian)
3. Nakhushev A.M. On the Darboux problem for a degenerate loaded second-order integro-differential equation. *Differential equations*. 1976. Vol. 12. No. 1. Pp. 103–108. (in Russian)
4. Dikinov Kh.B., Kerefov A.A., Nakhushev A.M. On a boundary value problem for the loaded equation of thermal conductivity. *Differential equations*. 1976. Vol. 12. Pp. 177–179. (in Russian)
5. Karmokov M.M. *Lokal'nye i nelokal'nye kraevye zadachi dlya razryvno-nagruzhennykh parabolicheskikh uravneniy* [Local and non-local boundary value problems for discontinuously loaded parabolic equations]. Kand. dis. Nalchik, 1990. 86 p. (in Russian)
6. Pskhu A.V. *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka* [Partial differential equations of fractional order]. Moscow: Nauka, 2005. 199 p. (in Russian)
7. Gekkieva S.Kh. Mixed boundary value problems for the loaded diffusion-wave equation. *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudanstiennogo universiteta. Seriya: Matematika. Fizika* [*Scientific Bulletin of Belgorod Stade University. Senes: Mathemaitics. Physics*]. 2016. Vol. 42. No. 6 (227). Pp. 32–35. (in Russian)
8. Nakhusheva F.M., Lafisheva M.M., Karmokov M.M., Dzhankulaeva M.A. A numerical method for solving a boundary value problem for a parabolic equation with a fractional time derivative with a concentrated heat capacity. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS.* 2018. No. 5 (85). Pp. 34–43. (in Russian)

9. Beshtokov M.Kh., Vodakhova V.A., Isakova M.M. Approximate solution of the first boundary value problem for the loaded heat equation. *Matematicheskaya fizika i komp'yuternoe modelirovanie* [*Mathematical physics and computer modeling*]. 2023. Vol. 26. No. 4. Pp. 5–17. (in Russian)

10. Friedman A. *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi parabolicheskogo tipa* [Partial Differential Equations of Parabolic Type]. Moscow: Mir, 1968. 427 p. (in Russian)

Информация об авторах

Кармоков Мухамед Мацевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова;

360004, Россия, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173;

mkarmokov@yandex.ru, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5189-6538

Нахушева Фатима Мухамедовна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова;

360004, Россия, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173;

fatima-nakhusheva@mail.ru, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3750-1445

Абрегов Мухад Хасанбиевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова;

360004, Россия, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173;

ORCID: https://orcid.org/0009-0003-9592-4133

Information about authors

Mukhamed M. Karmokov, Candidate of physical and mathematical sciences, Associate Professor of the Department of applied mathematics and computer science, Kabardino-Balkarian State University named after Kh. M. Berbekov;

360004, Russia, Nalchik, 173 Chernyshevsky street;

mkarmokov@yandex.ru, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5189-6538

Fatima M. Nakhusheva, Candidate of physical and mathematical sciences, Associate Professor of the Department of applied mathematics and computer science, Kabardino-Balkarian State University named after Kh. M. Berbekov;

360004, Russia, Nalchik, 173 Chernyshevsky street;

fatima-nakhusheva@mail.ru, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3750-1445

Mukhad Kh. Abregov, Candidate of physical and mathematical sciences, Associate Professor of the Department of applied mathematics and computer science, Kabardino-Balkarian State University named after Kh. M. Berbekov;

360004, Russia, Nalchik, 173 Chernyshevsky street;

ORCID: https://orcid.org/0009-0003-9592-4133