

**Восстановление порядка дробной производной  
в задаче математического моделирования накопления радона  
в избыточном объеме накопительной камеры  
по данным Петропавловск-Камчатского геодинамического полигона\***

**Д. А. Твёрдый**

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн  
Дальневосточного отделения Российской академии наук  
684034, Россия, Камчатский край, Елизовский район, с. Паратунка, ул. Мирная, 7

**Аннотация.** Исследуются вопросы, связанные с нелинейным переносом радиоактивного газа радона через геосреду, в частности, при описании вариаций объемной активности (RVA) в накопительной камере с датчиками регистрации. RVA считается информативным и оперативным предвестником землетрясений. Исходя из предположения о том, что процесс переноса радона происходит в проницаемой геосреде, для моделирования используется эрдитарная модель RVA на основе уравнения Риккати с дробной производной Герасимова–Капуто. Модель ранее прошла апробацию на геодинамическом полигоне в Петропавловске-Камчатском. В исследовании наибольший интерес представляет идентификация значения порядка дробной производной, которое связывается с такими характеристиками геосреды, как пористость и проницаемость. Однако у нас нет информации о некоторых параметрах рассматриваемого процесса, чтобы достаточно точно определить это значение. Но мы знаем дополнительную информацию, полученную в результате эксперимента. Эту информацию можно использовать для восстановления интересующих нас значений, что приводит нас к обратным задачам. Для восстановления порядка дробной производной решается задача одномерной оптимизации с помощью итерационного метода Левенберга–Марквардта ньютоновского типа. Показано, что с помощью данного метода можно восстанавливать некоторые параметры такой динамической системы, как перенос радона через геосреду. Показано, что решение обратной задачи методом Левенберга–Марквардта дает более точный результат за более короткое время, чем подбор значений параметров и видов функций для модельных уравнений вручную.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, дробная производная Герасимова–Капуто, обратные задачи, метод Левенберга–Марквардта, напряженно-деформированное состояние, геосреда, объемная активность радона, RVA, предвестники землетрясений

Поступила 23.11.2023, одобрена после рецензирования 29.11.2023, принята к публикации 01.12.2023

**Для цитирования.** Твёрдый Д. А. Восстановление порядка дробной производной в задаче математического моделирования накопления радона в избыточном объеме накопительной камеры по данным Петропавловск-Камчатского геодинамического полигона // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2023. № 6(116). С. 83–94. DOI: 10.35330/1991-6639-2023-6-116-83-94

## Restoration of the order of fractional derivative in the problem of mathematical modelling of radon accumulation in the excess volume of the storage chamber based on the data of Petropavlovsk-Kamchatsky geodynamic polygon\*

D.A. Tverdyi

Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation  
Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences  
684034, Russia, Kamchatka, Elizovsky district, Paratunka village, 7 Mirnaya street

**Abstract.** The paper researches the issues related to the nonlinear transport of radon gas through the geosphere, in particular, when describing the variation of volumetric activity (RVA) in an accumulation chamber with recording sensors. RVA is considered to be an informative and operational precursor to earthquakes. Based on the assumption that the radon transport process takes place in a permeable geosphere, an ereditary RVA model based on the Riccati equation with fractional Gerasimov–Kaputo derivative is used for modelling. The model has been previously validated at the geodynamic test site in Petropavlovsk-Kamchatsky. In the study the identification of the order value of the fractional derivative, which is associated with such geo-environmental characteristics as porosity and permeability is of most interest. However, we do not have information about some parameters of the process under consideration to determine this value accurately enough. But we know additional information obtained from the experiment. This information can be used to reconstruct the values of interest. Which leads us to the inverse problems. To reconstruct the order of the fractional derivative, we solve the one-dimensional optimisation problem using the iterative Levenberg–Marquardt method of Newtonian type. It is shown that this method can be used to reconstruct some parameters of such a dynamic system as radon transport through geo-environment. It is shown that the solution of the inverse problem by the Levenberg–Marquardt method gives a more accurate result in a shorter time than the manual selection of parameter values and types of functions for the model equations.

**Keywords:** mathematical modelling, Gerasimov–Kaputo fractional derivative, inverse problems, Levenberg–Marquardt method, stress-strain state, geo-environment, volumetric radon activity, RVA, earthquake precursors

Submitted 23.11.2023,

approved after reviewing 29.11.2023,

accepted for publication 01.12.2023

**For citation.** Tverdyi D.A. Restoration of the order of fractional derivative in the problem of mathematical modelling of radon accumulation in the excess volume of the storage chamber based on the data of Petropavlovsk-Kamchatsky geodynamic polygon. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS*. 2023. No. 6(116). Pp. 83–94. DOI: 10.35330/1991-6639-2023-6-116-83-94

### ВВЕДЕНИЕ

Решение обратных задач – важный и хорошо изученный класс математических задач, находящих свое прикладное применение в самых разных областях науки и техники [1]. Это связано с тем, что мы можем не знать о некоторых параметрах рассматриваемого процесса. Однако мы знаем дополнительную информацию, полученную в результате эксперимента. Эту информацию можно использовать для восстановления значений интересующих нас параметров процесса с помощью математического моделирования.

Радон – радиоактивный газ с периодом полураспада  $T = 3,85$ , продукт радиоактивного металла радия  $^{226}\text{Ra}$ , который постоянно содержится в земной коре. Как следствие возникло целое направление, называемое радоновым мониторингом, в рамках эманационного

\* The study was supported by the Russian Science Foundation grant No. 23-71-01050, <https://rscf.ru/project/23-71-01050/>

мониторинга геосред и процессов [2]. В ходе этих наблюдений ведется непрерывная регистрация  $^{222}\text{Rn}$  в накопительных камерах с помощью газоразрядных счетчиков. Данные, полученные таким образом, описывают объемную активность радона (RVA) в виде временных рядов. В свою очередь RVA считается информативным, хорошо себя зарекомендовавшим и оперативным предвестником сейсмических событий (землетрясений) [3, 4].

Непрерывный мониторинг вариаций RVA – одна из методик исследования напряженно-деформированного состояния геосреды [5]. Однако при поиске предвестников землетрясений, связанных с RVA, возникает проблема. В области установки датчиков регистрации  $^{222}\text{Rn}$  одновременно наблюдается множество факторов, влияющих на RVA. Основная сложность – определить фактор, связанный именно с изменениями напряженно-деформированного состояния геосреды.

В статье рассмотрены некоторые вопросы, связанные с нелинейным процессом миграции  $^{222}\text{Rn}$  в геосреду. В частности, при помощи методов математического моделирования приводятся описания вариаций RVA накопительного характера. Для чего с помощью итерационного метода Левенберга–Марквардта [6] формулируется и решается обратная задача на основе эрдитарной  $\alpha$ -модели RVA [7], ранее предложенной автором. Цель решения обратной задачи в том, чтобы методом одномерной оптимизации восстановить значения параметра модельного уравнения, которое предположительно обобщенно отражает изменения в напряженно-деформированном состоянии геосреды [7, 8], которое в свою очередь прямо влияет на интенсивность RVA, наблюдаемую в экспериментальных данных.

## 1. О МОДЕЛИРОВАНИИ ДИНАМИКИ RVA

Для описания механизмов миграции  $^{222}\text{Rn}$  разработано множество математических моделей, в том числе эманационный метод [2]. В его рамках рассматривается миграция в подземных водах, в пористых или трещиноватых геологических средах. Как пример можно привести модель на основе физико-химических представлений [9]. Основой таких моделей является применение ODE либо PDE целочисленных порядков с соответствующими начальными и краевыми условиями [10]. Исследуя процесс накопления радона в накопительной камере в ходе его миграции сквозь среду к поверхности, будем отталкиваться от хорошо изученной классической модели [11, 12] следующего вида:

$$\frac{dA(t)}{dt} = -\lambda_0 A(t) + S^\Delta, \quad (1)$$

где  $A(t) \in C^1[0, T]$  – RVA, Бек/м<sup>3</sup>;  $t \in [0, T]$  – текущее время моделирования;  $T > 0$  – общее время моделирования;  $\lambda_0$  – кратность воздухообмена (AER),  $c^{-1}$ .

Но в рамках данного исследования нас интересуют модели переноса радона, в основе которых лежат механические представления. Это модели, которые учитывают изменение вертикальной скорости газового потока под действием тектонических напряжений [13], что в свою очередь может приводить к изменениям проницаемости и пористости геосреды, в которой происходит процесс переноса (миграция) радона. Здесь пористость среды обусловлена наличием изолированных пор, а проницаемость среды понимается как наличие каналов, проводящих газ между порами. Пористость среды может приводить к замедлению процесса переноса газа, т.е. субдиффузии, а проницаемость среды, наоборот, к ускорению, т.е. супердиффузии. Данные процессы относятся к явлениям аномальной диффузии [14]. Классической ODE модели RVA (1) будет недостаточно для описания таких особенностей среды.

## 2. МОДЕЛЬ RVA НА ОСНОВЕ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

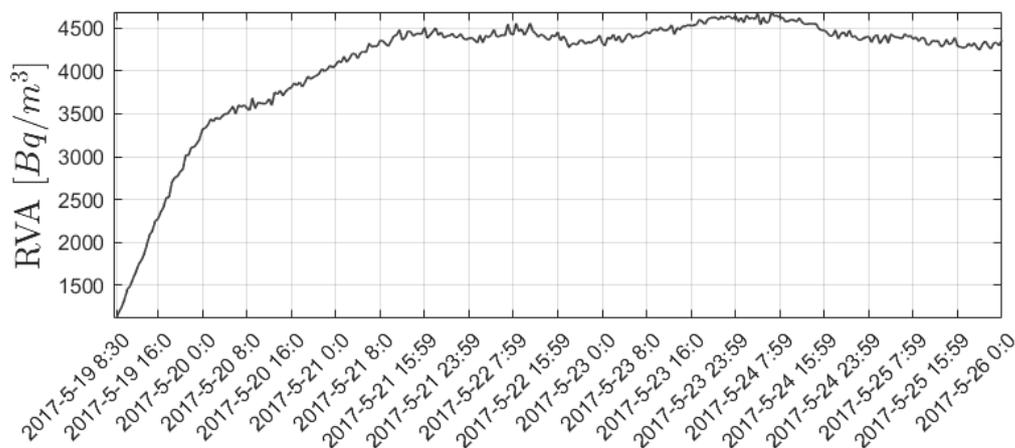
Аномальную диффузию можно описать, обратившись к хорошо развитому математическому аппарату интегро-дифференциального исчисления [15–17]. Это связывает интересные нас характеристики проницаемости геосреды с понятием эредитарности (наследственности или памяти) – свойства системы или среды помнить некоторое время оказанное на нее воздействие [18]. Так как к образованию структур, замедляющих или ускоряющих процесс переноса газа  $^{222}\text{Rn}$  в геосреде, должны приводить процессы изменения напряжения и деформаций геосреды – процессы, протекающие не мгновенно и влияющие на другие процессы в геосреде некоторое время после события. Исходя из предположения о том, что перенос  $^{222}\text{Rn}$  происходит в среде, подверженной таким процессам, в работе [7] проведено обобщение классической модели RVA (1) до эредитарной  $\alpha$ -модели RVA.

Как правило, процессы вариаций RVA имеют характер накопительного процесса, а значит, подчиняются логистическому закону. Поэтому в качестве модельного уравнения используется уравнение Риккати [DA\_Solid\_2022\_Investigation\_of\_Finite\_42]. Учитывая все вышесказанное, модель представляется задачей Коши вида:

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\dot{A}(\sigma)}{(t-\sigma)^\alpha} d\sigma = -a(t)A(t)^2 - \lambda_0 A(t) + S^\Delta, \quad A(0) = A_0, \quad (2)$$

где  $\Gamma(\cdot)$  – гамма-функция Эйлера;  $A_0$  – константа, определяющая значение RVA в момент времени  $t=0$ ;  $\lambda_0$  – кратность воздухообмена (AER),  $c^{-1}$ ;  $S^\Delta$  – константа, отвечающая за диффузионный механизм переноса, Бек/м<sup>3</sup>с;  $a(t)$  – коэффициент при квадратичном компоненте, полагается, что этот компонент отвечает за сток  $^{222}\text{Rn}$  из камеры за счет атмосферного давления;  $\alpha$  – порядок дробной производной, отвечающий за интенсивность процесса переноса  $^{222}\text{Rn}$  вследствие эффекта памяти [7].

В работе [7] показано, что (2) может описывать как процессы роста, так и спада RVA в накопительных камерах в зависимости от значений и видов функций, входящих в модельное уравнение. Верифицируем обе описанные модели (1) и (2), для чего используем экспериментальные данные по вариациям RVA. Данные из рисунка 1 получены в пункте YSSR на полуострове Сахалин. Регистрация RVA проводилась в течение 160 часов в накопительной камере на глубине 2 м с шагом в 30 мин.

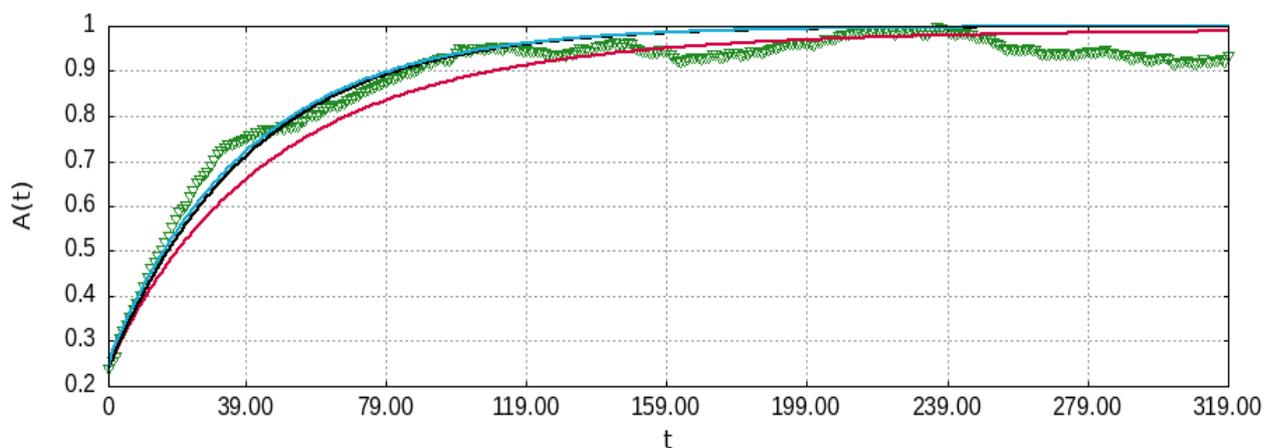


**Рис. 1.** Данные по  $\beta$ -излучению, сопровождающему радиоактивный распад  $^{222}\text{Rn}$ , характеризующие вариации RVA

**Fig. 1.** Data on  $\beta$ -radiation accompanying radioactive decay of  $^{222}\text{Rn}$ , that characterize variations of RVA

На рисунке 2 приведены результаты моделирования процесса накопления  $^{222}\text{Rn}$  по моделям (2) и (1) с параметрами вида:

$$N = 320, \quad T = 320, \quad \lambda_0 = 0,025, \quad A_0 = 0,239, \quad a(t) = 0, \quad S^A = \lambda_0. \quad (3)$$



*Рис. 2. Модельные кривые по моделям (2) и (1) при различных параметрах*

*Fig. 2. Model curves by models (2) and (1) at different parameters*

На рисунке 2 представлены:

зеленым – обработанные экспериментальные данные по вариациям RVA с пункта YSSR, для чего было проведено сглаживание методом Simple Moving Average и нормировка на максимум;

красным – модельная кривая по (2) с параметрами (3), где  $\alpha = 0,95$  с коэффициентами подбора: детерминации ( $R^2 = 0,9$ ) и корреляции ( $corr = 0,97$ );

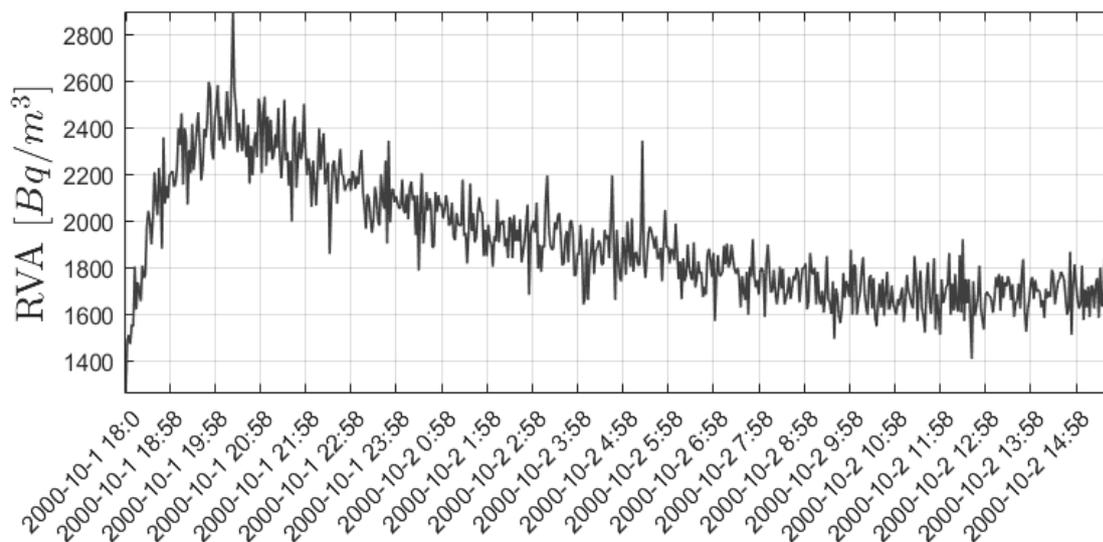
черным – модельная кривая по (2) с параметрами (3), где  $\alpha = 1$ , здесь  $R^2 = 0,926$ ,  $corr = 0,984$ ;

бирюзовым – модельная кривая по (1) классической модели с теми же параметрами, здесь  $R^2 = 0,929$ ,  $corr = 0,985$ .

Значение параметра AER среды  $\lambda_0 = 0,025$  уточняется перебором за счет решения (1) классической модели до достижения высоких значений детерминации ( $R^2$ ) и корреляции ( $corr$ ) с обработанными данными.

Как показано на рисунке 2, в случае  $\alpha = 1$  модельные кривые по эредитарной (2) и классической (1) моделям практически совпадают. Это подтверждает корректность обобщения до эредитарной  $\alpha$ -модели RVA.

Далее модель (2) прошла апробацию на пунктах мониторинга  $^{222}\text{Rn}$  на геодинамическом полигоне в Петропавловске-Камчатском. Данные (рис. 3), используемые при моделировании, получены в пункте GLLR, расположенном в районе Паратункой гидротермальной системы. Регистрация RVA проводилась 22 часа в накопительной камере на глубине 1 м с шагом 2 мин.

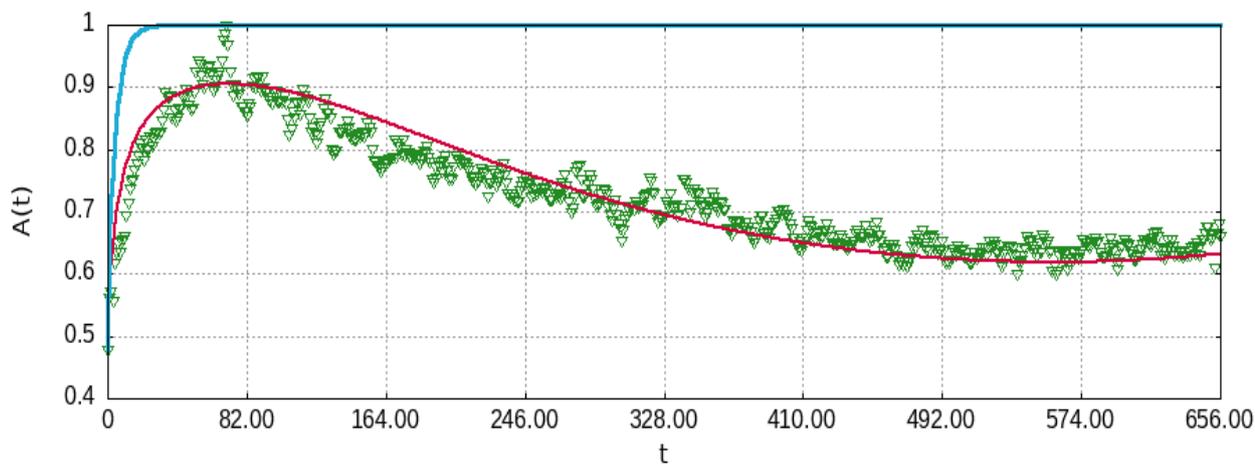


**Рис. 3.** Данные по  $\beta$ -излучению, сопровождающему радиоактивный распад  $^{222}\text{Rn}$ , характеризующие вариации RVA

**Fig. 3.** Data on  $\beta$ -radiation accompanying radioactive decay of  $^{222}\text{Rn}$ , that characterize variations of RVA

На рисунке 4 приведены результаты моделирования процесса накопления  $^{222}\text{Rn}$ , где  $\alpha = 0,65$ , а остальные параметры модели (2) имеют вид:

$$N = 657, T = 657, \lambda_0 = 0,2, A_0 = 0,478, a(t) = \lambda_0 \sin\left(\frac{3\pi t}{5T}\right)^2, S^\Delta = \lambda_0. \quad (4)$$



**Рис. 4.** Модельные кривые по моделями (2) и (1) при различных параметрах

**Fig. 4.** Model curves by models (2) and (1) at different parameters

На рисунке 4 представлены:

зеленым – обработанные экспериментальные данные с пункта GLLR;

красным – модельная кривая (2) с параметрами (4), подбираемыми вручную ( $R^2 = 0,86$ ,  $corr = 0,95$ );

бирюзовым – кривая по (1) классической модели с (4) параметрами ( $R^2 = -0,8$ ,  $corr = 0,2$ ).

### 3. ПОСТАНОВКА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

В исследовании наибольший интерес представляет идентификация значения  $0 < \alpha < 1$  порядка дробной производной. Однако значение всех параметров и видов функций определяется вручную, до достижения высоких значений коэффициентов детерминации и корреляции с данными, что приводит к большим временным затратам. Это приводит нас к обратным задачам [1]. Запишем задачу Коши (2) в виде обратной задачи на компоненты вектора  $\vec{X}$  :

$$\partial_{0t}^{\alpha(\vec{X})} A(\sigma) = F(A(t), t), \quad A(0) = A_0, \quad (5)$$

где  $\partial_{0t}^{\alpha(\vec{X})} A(\sigma) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\dot{A}(\sigma)}{(t-\sigma)^\alpha} d\sigma$  – дробная производная Герасимова–Капуто [19, 20];

$F(A(t), t) = -a(t)A(t)^2 - \lambda_0 A(t) + S^\Delta$  – функция, отвечающая за различные механизмы изменения уровня  $^{222}\text{Rn}$  в камере, и в общем случае она может быть нелинейной;  $\vec{X} = [X_0 \dots X_{K-1}]$  – компоненты вектора, определяющие функцию  $\alpha(t)$ .

Функция  $\alpha(\vec{X})$  неизвестна, нужно восстановить компоненты вектора  $X_0 \dots X_{K-1}$  по известной дополнительной информации, т.е. экспериментальным данным. Т.к.  $\alpha$  – константа для всех  $t \in [0, T]$ , то  $k = 1$ , а значит  $\alpha(\vec{X}) = \alpha([X_0]) = \alpha$ . Что определяет (5) как задачу одномерной оптимизации на параметр  $\alpha$ .

Полученная задача одномерной оптимизации решается с помощью итерационного метода Левенберга – Марквардта Ньютоновского типа [6].

### 4. АЛГОРИТМ МЕТОДА ЛЕВЕНБЕРГА–МАРКВАРДТА

Алгоритм решения задачи (5) основан на многократном решении прямой задачи Коши (2) с помощью неявной конечно-разностной схемы (IFDS), предложенной в работе [DA\_Solid\_2022\_Investigation\_of\_Finite\_42], и реализован на языке программирования C. Алгоритм IFDS решения прямой задачи реализован на языке C в виде параллельного эффективного алгоритма для GPU. Опишем поэтапно цикл алгоритма:

1. Задаем на  $n = 0$  шаге:

а. Вектор обратной задачи  $A = A(t_i) = [\varphi_i] = \vec{\varphi}$ , где  $i = 0, \dots, M - 1$ ,  $M$  – число наблюдений,  $\varphi_i$  – дополнительная информация,  $N = M$  – число узлов вычислительной сетки;

б. Начальное приближение  $\overline{X}^{(0)}$  для компонент  $\vec{X}$ ;

с. Параметр регуляризации  $\gamma^{(0)} = v \cdot \max_i (b_{ii}^{(0)})$  – главная диагональ матрицы  $B^{(0)} = J(\overline{X}^{(0)})^T J(\overline{X}^{(0)})$ , где  $J(\cdot)$  – матрица Якоби,  $v$  – заданная константа.

2. Вычисляем на  $n = 0$  шаге  $s_0 = \Psi(\overline{X}^{(0)})$  – начальное значение функционала невязки:

а. Решаем прямую задачу (2) численно относительно начального приближения  $\alpha(\overline{X}^{(0)})$ , получаем вектор начального решения  $\overline{A}^{(0)} = A(\overline{X}^{(0)})$ ;

б. Формируем вектор невязки  $\overline{\eta}^{(0)} = \eta(\overline{X}^{(0)}) = \vec{\varphi} - \overline{A}^{(0)}$ ;

с. Вычисляем невязку  $s_0 = \Psi(\overline{X}^{(0)}) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{M-1} [\eta_i^{(0)}]^2$ .

3. Для  $n \geq 0$  строим матрицу Якоби  $J(\cdot)$  по каждой компоненте  $\vec{X} = [X_0 \dots X_{k-1}]$ :

а. Задаем приближение  $\overline{X}^{(n)}$  для всех  $K$  компонент  $\vec{X}$ , для чего вычисляем  $\overline{X}^{(n)} + \delta \vec{X} = [X_k^{(n)} + \delta X_k]$ , где  $\delta \vec{X}$  – заданные малые приращения для  $\vec{X}$  компонент,  $k = 0..K-1$ ;

б. Решаем прямую задачу (2) численно относительно  $\alpha(\overline{X}^{(n)} + \delta \vec{X})$  приближения, получая решение  $A(\overline{X}^{(n)} + \delta \vec{X})$ ;

с. Формируем вектор невязки  $\overline{\eta}^{(n)\delta} = \eta(\overline{X}^{(n)} + \delta \vec{X}) = \vec{\varphi} - A(\overline{X}^{(n)} + \delta \vec{X})$ , причем  $\overline{\eta}^{(n-1)\delta} = \eta(\overline{X}^{(n-1)} + \delta \vec{X}) = \eta(\overline{X}^{(n)}) = \vec{\varphi} - A(\overline{X}^{(n)}) = \Theta$ ;

д. Вычисляем  $J_{ij} = \frac{\eta_i^{(n)\delta} - \eta_i^{(n-1)\delta}}{\delta X_k}$ , где  $k = 0..K-1$ ,  $i = 0..N-1$ .

4. Для  $n \geq 0$  вычисляем  $s_1 = \Psi(\overline{X}^{(n)} + \Delta \vec{X})$  – значение функционала невязки:

а. Вычисляем шаг  $\Delta \vec{X} = [\Delta X_k]$  – оптимальные приращения  $\vec{X}$ , решая систему линейных алгебраических уравнений вида:

$$\Delta \vec{X} = (J^T J + \gamma \text{diag}(J^T J))^{-1} (-J^T \Theta),$$

б. Решаем прямую задачу (2) численно относительно  $\alpha(\overline{X}^{(n)} + \Delta \vec{X})$  приближения, получая решение  $\overline{A}^{(n)\Delta} = A(\overline{X}^{(n)} + \Delta \vec{X})$ ;

с. Формируем вектор невязки  $\overline{\eta}^{(n)\Delta} = \eta(\overline{X}^{(n)} + \Delta \vec{X}) = \vec{\varphi} - \overline{A}^{(n)\Delta}$ ;

д. Вычисляем невязку  $s_1 = \Psi(\overline{X}^{(n)} + \Delta \vec{X}) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{M-1} [\eta_i^{(n)\Delta}]^2$ .

5. Условия выхода из цикла:

а. Корректный выход. Если среднеквадратичная ошибка  $\varepsilon \leq \Omega$ ,

где  $\varepsilon = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} [\varphi_i - A_i^{(n)\Delta}]^2$ ,  $\Omega$  – критерий остановки, заданная точность решения. Следовательно, алгоритм сходится к оптимальному решению.

б. Некорректный выход. Алгоритм не дает существенного изменения значений  $\Delta \vec{X}$  в ходе итераций, т.е.

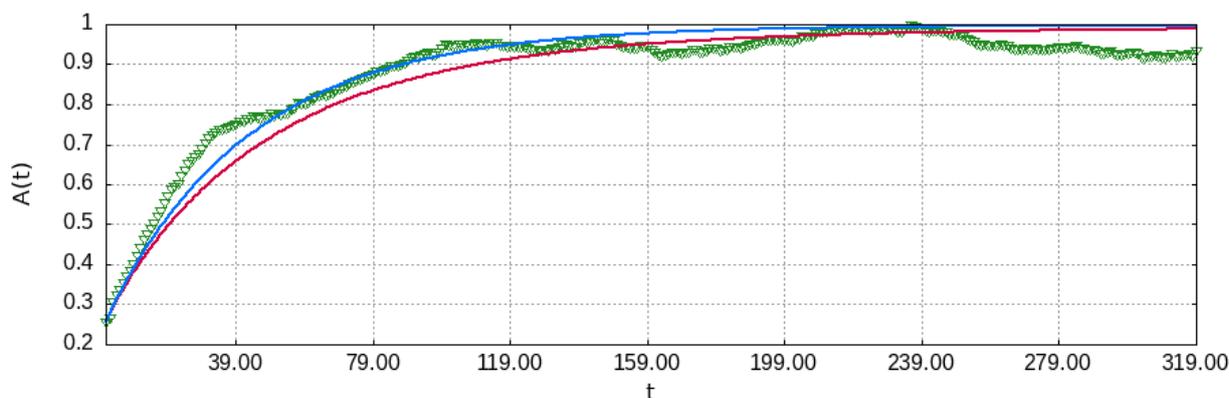
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} [\Delta X_k^{(n)} - \Delta X_k^{(n-1)}] \right) \rightarrow 0,$$

следовательно, алгоритм сходится к некоторому решению.

б. Условия продолжения цикла:

- а. Если  $s_0 < s1$ , то  $s_0 = s1$ ,  $\bar{X} = \bar{X} + \Delta\bar{X}$ ,  $\gamma = \frac{\gamma}{c}$ , где  $c$  – заданная константа;  $n = n+1$ , переходим к пункту 3;
- б. Если  $s_0 > s1$ , то  $\gamma = c\gamma$ , переходим к пункту 4.

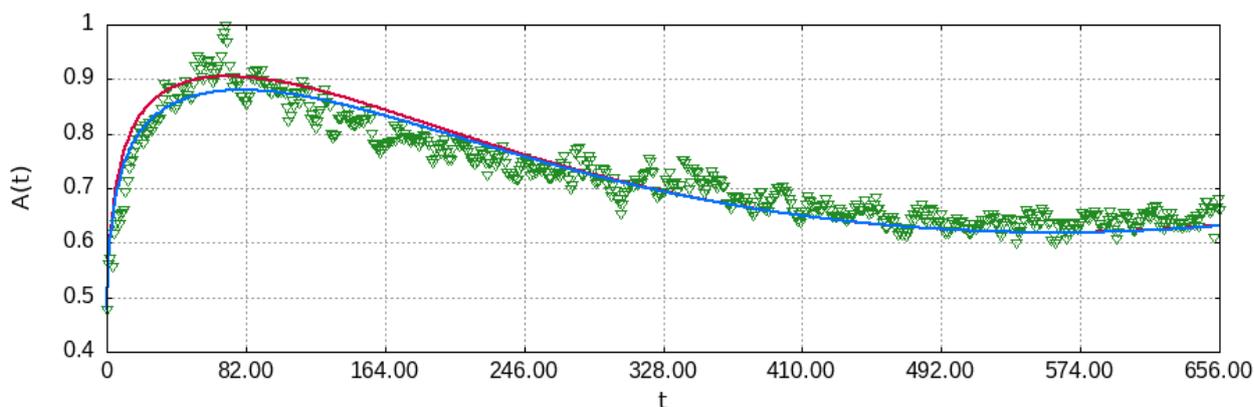
### 5. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ



**Рис. 5.** Модельные кривые, полученные решением прямой и обратной задач

**Fig. 5.** Model curves obtained by solving direct and inverse problems

На рисунке 5 представлены результаты моделирования по прямой задаче (2) с параметрами (3) и результаты, полученные с помощью решения обратной задачи (5) с параметрами (3) и  $v = 5$ ,  $c = 1$ ,  $\Omega = 1 \cdot 10^{-2}$ : зеленым – обработанные экспериментальные данные с пункта YSSR; красным – модельная кривая при  $\alpha = 0,95$ , подбираемым вручную ( $R^2 = 0,9$ ,  $corr = 0,97$ ); синим – модельная кривая с восстановленным  $\alpha = 0,98$  из дополнительной информации ( $R^2 = 0,93$ ,  $corr = 0,982$ ).



**Рис. 6.** Модельные кривые, полученные решением прямой и обратной задач

**Fig. 6.** Model curves obtained by solving direct and inverse problems

На рисунке 6 представлены результаты моделирования по прямой задаче (2) с параметрами (4) и результаты, полученные с помощью решения обратной задачи (5) с параметрами (4) и  $v = 5$ ,  $c = 1$ ,  $\Omega = 1 \cdot 10^{-4}$ : зеленым – обработанные данные GLLR; красным – модельная кривая при  $\alpha = 0,65$ , подбираемым вручную ( $R^2 = 0,86$ ,  $corr = 0,95$ ); синим – модельная кривая с восстановленным  $\alpha = 0,59$  из дополнительной информации ( $R^2 = 0,9$ ,  $corr = 0,95$ ).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На языке программирования С был разработан программный комплекс, реализующий: эредитарную  $\alpha$ -модель RVA и алгоритмы ее численного решения; описанный алгоритм решения обратной задачи Левенберга–Марквардта; визуализацию данных и результатов моделирования.

Показано, что помощью итерационного метода Левенберга – Марквардта можно восстанавливать значение  $\alpha$ , отвечающего за интенсивность процесса переноса радиоактивного газа радона.

Из результатов моделирования видно, что с помощью решения обратной задачи можно более точно восстанавливать параметры математической модели процесса накопления <sup>222</sup>Rn, характеризующие то или иное свойство среды.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кабанихин С. И., Искаков К. Т.* Оптимизационные методы решения коэффициентных обратных задач. Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 2001. 315 с.
2. *Рудаков В. П.* Эманиационный мониторинг геосред и процессов. Москва: Научный мир, 2009. 175 с.
3. *Фирстов П. П., Макаров Е. О., Глухова И. П. и др.* Поиск предвестниковых аномалий сильных землетрясений по данным мониторинга подпочвенных газов на Петропавловск-Камчатском геодинамическом полигоне // Геосистемы переходных зон. 2018. Т. 1. № 2. С. 16–32. DOI: 10.30730/2541-8912.2018.2.1.016-032
4. *Cicerone R.D., Ebel J.E., Beittton J.* A systematic compilation of earthquake precursors // Tectonophysics. 2009. Vol. 476. No. 3–4. Pp. 371–396. DOI: 10.1016/j.tecto.2009.06.008
5. *Neri M., Giammanco S., Ferrera E. et al.* Spatial distribution of soil radon as a tool to recognize active faulting on an active volcano: The example of Mt. Etna (Italy) // Journal of environmental radioactivity. 2011. Vol. 102(9). Pp. 863–870. DOI: 10.1016/j.jenvrad.2011.05.002
6. *Gill P.E., Murray W., Wright M.H.* Practical Optimization. Philadelphia: SIAM, 2019. 421 p.
7. *Tverdyi D.A., Makarov E.O., Parovik R.I.* Hereditary Mathematical Model of the Dynamics of Radon Accumulation in the Accumulation Chamber // Mathematics. 2022. Vol. 11. No. 4:850. Pp. 1–20. DOI: 10.3390/math11040850
8. *Твёрдый Д. А., Макаров Е. О., Паровик Р. И.* Исследования напряженно-деформированного состояния геосреды эманиационными методами на примере  $\alpha(t)$ -модели переноса радона // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2023. Т. 3. № 44. С. 86–104. DOI: 10.26117/2079-6641-2023-44-3-86-104
9. *Понамарев А. С.* Фракционирование в гидротерме как потенциальная возможность формирования предвестников землетрясений // Геохимия. 1989. № 5. С. 714–724.
10. *Паровик Р. И.* Математическое моделирование неклассической теории эманиационного метода. Ред. *Фирстов П. П., Ильин И. А.* Петропавловск-Камчатский: КамГУ им. Витуса Беринга, 2014. 80 с.
11. *Vasilyev A.V., Zhukovsky M.V.* Determination of mechanisms and parameters which affect radon entry into a room // Journal of Environmental Radioactivity. 2013. Vol. 124. Pp. 185–190. DOI: 10.1016/j.jenvrad.2013.04.014
12. *Фирстов П. П., Макаров Е. О.* Динамика подпочвенного радона на Камчатке и сильные землетрясения. Петропавловск-Камчатский: КамГУ им. Витуса Беринга, 2018. 148 с.
13. *King C.Y.* Isotopic geochemical precursors of earthquakes and volcanic eruption // Advisory Group Meeting held. Vienna. International atomic energy agency. 1991. Pp. 22–36.

14. *Uchaikin V.V. Fractional Derivatives for Physicists and Engineers. Vol. I. Background and Theory. Berlin, Springer. 2013. 373 p.*
15. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam, Elsevier Science Limited. 2006. 204 p.*
16. *Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.*
17. *Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.*
18. *Volterra V. Functional theory, integral and integro-differential equations. London, Blackie & Son Limited. 1930. 226 p.*
19. *Gerasimov A.N. Generalization of linear deformation laws and their application to internal friction problems. Applied Mathematics and Mechanics. 1948. Vol. 12. Pp. 529–539.*
20. *Caputo M. Elasticita e Dissipazione. Bologna, Zanichelli. 1969. 150 p.*

## REFERENCES

1. *Kabanihin S.I., Iskakov K.T. Optimizacionnye metody resheniya koefficientnyh obratnyh zadach [Optimisation methods for solving coefficient inverse problems]. Novosibirsk: Novosibirskij gosudarstvennyj universitet, 2001. 315 p. (In Russian)*
2. *Rudakov V.P. Emanacionnyj monitoring geosred i processov [Emanation monitoring of geo-mediations and processes]. Moscow: Nauchnyj mir, 2009. 175 p. (In Russian)*
3. *Firstov P.P., Makarov E.O., Gluhova I.P. et. al. Search for strong earthquake precursor anomalies from subsurface gas monitoring data at the Petropavlovsk-Kamchatsky geodynamic test site. Geosistemy perekhodnyh zon [Geosystems of transition zones] 2018. Vol. 1. No 2. Pp. 16–32. DOI: 10.30730/2541-8912.2018.2.1.016-032. (In Russian)*
4. *Cicerone R.D., Ebel J.E., Beitton J. A systematic compilation of earthquake precursors. Tectonophysics. 2009. Vol. 476. No. 3–4. Pp. 371–396. DOI: 10.1016/j.tecto.2009.06.008*
5. *Neri M., Giammanco S., Ferrera E. et al. Spatial distribution of soil radon as a tool to recognize active faulting on an active volcano: The example of Mt. Etna (Italy). Journal of environmental radioactivity. 2011. Vol. 102(9). Pp. 863–870. DOI: 10.1016/j.jenvrad.2011.05.002*
6. *Gill P.E., Murray W., Wright M.H. Practical Optimization. Philadelphia, USA: SIAM, 2019. 421 p.*
7. *Tverdyi D.A., Makarov E.O., Parovik R.I. Hereditary Mathematical Model of the Dynamics of Radon Accumulation in the Accumulation Chamber. Mathematics. 2022. Vol. 11. No. 4:850. Pp. 1–20. DOI: 10.3390/math11040850*
8. *Tverdyi D.A., Makarov E.O., Parovik R.I. Research of Stress-Strain State of Geo-Environment by Emanation Methods on the Example of alpha(t)-Model of Radon Transport. Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences. 2023. Vol. 3. No. 44. Pp. 86–104. DOI: 10.26117/2079-6641-2023-44-3-86-104. (In Russian)*
9. *Ponamarev A.S. Fractionation in hydrotherm as a potential possibility of formation of earthquake precursors. Geohimiya [Geochemistry]. 1989. No 5. Pp. 714–724. (In Russian)*
10. *Parovik R.I. Matematicheskoe modelirovanie neklassicheskoj teorii emanacionnogo metoda [Mathematical modelling of the non-classical theory of the emanation method]. Petropavlovsk-Kamchatskij, KamGU im. Vitusa Beringa, 2014. 80 p. (In Russian)*
11. *Vasilyev A.V., Zhukovsky M.V. Determination of mechanisms and parameters which affect radon entry into a room. Journal of Environmental Radioactivity. 2013. Vol. 124. Pp. 185–190. DOI: 10.1016/j.jenvrad.2013.04.014*

12. Firstov P.P., Makarov E.O. *Dinamika podpochvennogo radona na Kamchatke i sil'nye zemletryaseniya* [Dynamics of subsurface radon in Kamchatka and strong earthquakes]. Petropavlovsk-Kamchatskij: KamGU im. Vitusa Beringa, 2018. 148 p. (In Russian)
13. King C.Y. Isotopic geochemical precursors of earthquakes and volcanic eruption. Advisory Group Meeting held. Vienna. *International atomic energy agency*. 1991. Pp. 22–36.
14. Uchaikin V.V. *Fractional Derivatives for Physicists and Engineers*. Vol. I. Background and Theory. Berlin, Springer. 2013. 373 p.
15. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Amsterdam, Elsevier Science Limited. 2006. 204 p.
16. Nahushev A.M. *Drobnoe ischislenie i ego primenenie* [Fractional calculus and its applications]. Moscow: Fizmatlit, 2003. 272 p. (In Russian)
17. Pskhu A.V. *Uravneniya v chastnyh proizvodnyh drobnogo poryadka* [Equations in partial derivatives of fractional order]. Moscow: Nauka, 2005. 199 p. (In Russian)
18. Volterra V. *Functional theory, integral and integro-differential equations*. London: Blackie & Son Limited, 1930. 226 p.
19. Gerasimov A.N. Generalization of linear deformation laws and their application to internal friction problems. *Applied Mathematics and Mechanics*. 1948. Vol. 12. Pp. 529–539.
20. Caputo M. *Elasticita e Dissipazione*. Bologna, Zanichelli. 1969. 150 p.

### **Информация об авторе**

**Твёрдый Дмитрий Александрович**, канд. физ.-мат. наук, науч. сотр. лаборатории электромагнитных излучений, Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН;

684034, Россия, Камчатский край, Елизовский район, с. Паратунка, ул. Мирная, 7;  
tverdyi@ikir.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6983-5258>

### **Information about the author**

**Tverdyi Dmitrii Alexandrovich**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Researcher, Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS;

684034, Russia, Kamchatka, Elizovsky district, Paratunka village, 7 Miranaya street;  
tverdyi@ikir.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6983-5258>