

УДК 519.17; 519.85

Научная статья

DOI: 10.35330/1991-6639-2023-6-116-55-64

EDN: ENFHNP

## Метод компьютерного проектирования разветвленных трубопроводных гидравлических сетей с оптимальным количеством точек Штейнера

М. А. Багов

Институт прикладной математики и автоматизации –  
филиал Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук  
360000, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А

**Аннотация.** Разработаны метод и алгоритм построения потоковых гидравлических сетей с оптимальным количеством точек Штейнера. Метод состоит в последовательном удалении точек Штейнера и последующей оптимизации координат эффективных точек Штейнера. Компьютерная система предназначена для проектирования больших распределительных трубопроводных сетей регионального и межрегионального водоснабжения.

**Ключевые слова:** потоковая сеть, точки Штейнера, оптимизация количества и координат

Поступила 27.11.2023, одобрена после рецензирования 04.12.2023, принята к публикации 08.12.2023

**Для цитирования.** Багов М. А. Метод компьютерного проектирования разветвленных трубопроводных гидравлических сетей с оптимальным количеством точек Штейнера // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2023. № 6(116). С. 55–64. DOI: 10.35330/1991-6639-2023-6-116-55-64

MSC: 90C26

Original article

## Computer design method of branched pipeline hydraulic networks with an optimal number of Steiner points

M.A. Bagov

Institute of Applied Mathematics and Automation –  
branch of Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences  
360000, Russia, Nalchik, 89 A Shortanov street

**Abstract.** A method and algorithm for constructing flow hydraulic networks with an optimal number of Steiner points have been developed. The method consists of sequential removal of Steiner points and subsequent optimization of the coordinates of effective Steiner points. The computer system was created for the design of large distribution pipeline networks for regional and interregional water supply.

**Keywords:** stream network, Steiner points, quantity and coordinate optimization

Submitted 27.11.2023, approved after reviewing 04.12.2023, accepted for publication 08.12.2023

**For citation.** Bagov M.A. Computer design method of branched pipeline hydraulic networks with an optimal number of Steiner points. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS*. 2023. No. 6(116). Pp. 55–64. DOI: 10.35330/1991-6639-2023-6-116-55-64

## ВВЕДЕНИЕ

Потоковая сеть Штейнера снижает затраты на создание и эксплуатацию сети в сравнении с сетью без точек Штейнера. Однако потоковая гидравлическая сеть Штейнера требует дополнительных затрат на создание большого количества устройств соединения входящих в каждую точку Штейнера и исходящих из нее трубопроводов.

Метод оптимизации количества точек Штейнера в потоковой сети состоит из следующих фаз: преобразование исходного потокового дерева сети в сеть Штейнера; оптимизация потоковой сети Штейнера путем оптимизации структуры и координат точек Штейнера каждого узла; последовательное удаление из каждой текущей модели сети точек Штейнера, расположенных достаточно близко к точкам потребления потоков и слияния близких точек Штейнера, связанных потоком; оптимизация координат оставшихся точек Штейнера.

Для проектных организаций при компьютерном проектировании систем важно представлять не один, а несколько проектов. Поэтому в разработанной программной системе производится загрузка нескольких начальных моделей гидравлических сетей различной структуры высокого ранга оптимальности и их последующая трансформация в потоковые сети Штейнера с оптимальным количеством точек Штейнера.

## 1. ПОТОКОВАЯ СЕТЬ ШТЕЙНЕРА 2-ГО РАНГА ОПТИМАЛЬНОСТИ

Сложность решения задач оптимизации потоковых распределительных сетей, и в том числе трубопроводных гидравлических сетей, связана с тем, что эта задача относится к классу задач минимизации вогнутой функции на выпуклом множестве. Именно поэтому в работах [1–3] было введено понятие ранга экстремума для задач оптимизации потоковых сетей.

**Основные определения**

Назовем потоковую сеть Штейнера  $\{\Gamma^*(B^*, D^*), \{v_{ij}^*\}_{ij \in D}, \{x_i^*, y_i^*\}_{B_{\text{ш}}^*}\}$   $P$  оптимальной, если она оптимальна на любой подсети  $P_k^*$ , образованной  $P$  – достижимыми из точки  $k$  вершинами сети, т.е. если  $\forall k \in B^*$ , выполнено условие минимума:

$$\min \sum_{ij \in D} f_{ij}(v_{ij}) \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} = \sum_{ij \in D^*} f_{ij}(v_{ij}^*) \sqrt{(x_i^* - x_j^*)^2 + (y_i^* - y_j^*)^2},$$

где  $\Gamma^*(B^*, D^*)$  – граф сети,  $v_{ij}^*$  – потоки по ветвям сети,  $\{x_i^*, y_i^*\}_{B_{\text{ш}}^*}$  – координаты точек Штейнера сети,  $v_{ij} = v_{ij}^*, \forall ij \notin P_i^*$ ;  $x_i = x_i^*, y_i = y_i^* \forall i \notin P_i^*$ .

Исходное остовное дерево потоковой сети – остовный граф  $\Gamma(B, D)$ , потоки по дугам и потребление потоков в вершинах которого удовлетворяют условию непрерывности:

$$q \begin{cases} q_j - \sum_{jk \in \Gamma_j^-} q_{jk} = q_j, \forall i \neq 1 \in B \\ \sum_{j \in \Gamma_1^+} q_{1j} = \sum_{j \in B} q_j = Q \\ q_j > 0, \forall i \neq 1 \in B, q_{ij} > 0, \forall ij \in D, \end{cases}$$

где  $B$  – множество вершин графа сети,  $|B| = n$  – количество вершин сети,  $D$  – множество дуг сети,  $|D| = (n - 1)$  – количество дуг сети,  $\Gamma_j^-$  – множество ветвей графа сети, исходящих из точки  $j$ ,  $\Gamma_1^+$  – ветви графа сети, исходящие из источника сети,  $Q$  – поток из источника в сеть,  $q_{ij}$  – поток из точки  $i$  в  $j$ ,  $q_j > 0 \forall j \in B$  – потребление потока в точке  $j$ .

Значение целевой функции заданного потокового остоного дерева сети

$$Z = \sum_{ij \in D} f_{ij}(q_{ij})l_{ij}, ij \in D,$$

где  $l_{ij}$  – длина  $ij$ -й ветви сети, для трубопроводных потоковых гидравлических сетей, как известно [4], имеет вид

$$f_{ij}(v_{ij}) = \left[ (k\beta)^{\frac{1}{1-\beta}} \left( \frac{\beta-1}{\beta} \right) \right] v_{ij}^{\frac{\beta-\alpha}{\beta-1}},$$

где  $v_{ij}$  – поток по  $ij$ -й ветви.

Величина в квадратных скобках зависит только от материала трубопроводов, а соответствующее им значение коэффициентов  $\alpha, \beta, k$  – известно [5, с. 52–54]. Ниже представлена соответствующая таблица.

**Таблица 1.** Значение коэффициентов целевой функции для различных материалов труб

**Table 1.** Value of objective function coefficients for various pipe materials

Материал труб	Коэффициенты			
	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$k$
Сталь	1,4	2	5,3	0,001735
Чугун	1,6	2	5,3	0,001735
Асбестоцемент	1,95	1,85	4,89	0,001180
Пластмасса	1,95	1,774	1,774	0,001052

Таким образом, целевая функция для гидравлической потоковой сети такова:

$$\sum_{ij \in D} v_{ij}^{\frac{\beta-\alpha}{\beta-1}} l_{ij},$$

а затраты на создание и эксплуатацию исходной сети оцениваются величиной

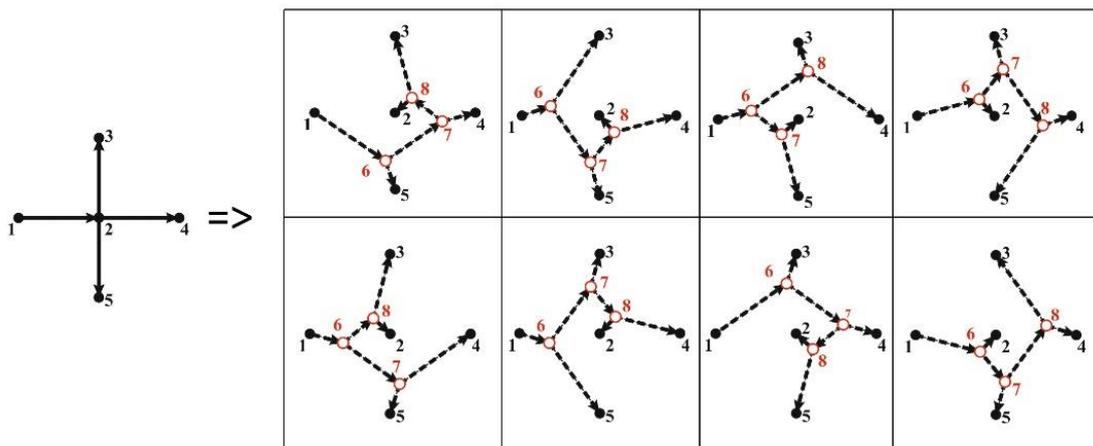
$$(k\beta)^{\frac{1}{1-\beta}} \left( \frac{\beta-1}{\beta} \right) \sum_{ij \in D} q_{ij}^{\frac{\beta-\alpha}{\beta-1}} l_{ij}.$$

Например, для полиэтиленовых труб  $\left( \frac{\beta-\alpha}{\beta-1} \right) = 0,8045$ .

## 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНОЙ ПОТОКОВОЙ СЕТИ В СЕТЬ ШТЕЙНЕРА 2-ГО РАНГА ОПТИМАЛЬНОСТИ

Преобразование остоного дерева распределительной сети в сеть Штейнера осуществляется путем развертывания его узлов в структуры Штейнера.

Например, узловая структура, содержащая 5 вершин, развертывается в 8 остоных деревьев, различных по структуре.



**Рис. 1.** Узловые структуры Штейнера для узловой структуры

**Fig. 1.** Steiner nodal structures for nodal structure

Впервые трехточечная задача Штейнера с различными весами ребер решена в работе [6–7].

Оптимизация каждой из альтернативных узловых структур формируемой сети Штейнера проводится на основе последовательного решения на каждой структуре элементарных (3-точечных) сетевых задач Штейнера (ЭСЗШ)

$$Z = \sum_{i=1}^3 f(q_i) \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2} \rightarrow \min, \quad q_1 = q_2 + q_3$$

градиентным методом:

$$\begin{cases} x^{j+1} = x^j - \frac{\partial Z}{\partial x}(x^j, y^j) \alpha^j = x^j + \sum_{i=1}^3 f(q_i) \frac{x_i - x^j}{\sqrt{(x_i - x^j)^2 + (y_i - y^j)^2}} \alpha^j \\ y^{j+1} = y^j - \frac{\partial Z}{\partial y}(x^j, y^j) \alpha^j = y^j + \sum_{i=1}^3 f(q_i) \frac{y_i - y^j}{\sqrt{(x_i - x^j)^2 + (y_i - y^j)^2}} \alpha^j. \end{cases}$$

Для построения оптимальной узловой структуры следует определить ту из альтернативных узловых структур Штейнера, на которой решение будет наилучшим. Эта задача решается оптимизацией координат точек Штейнера на каждой из структур и выделением из полученных решений наилучшего.

### 3. ПОСТРОЕНИЕ СЕТИ ШТЕЙНЕРА 2-ГО РАНГА ОПТИМАЛЬНОСТИ С ОПТИМАЛЬНЫМ КОЛИЧЕСТВОМ ТОЧЕК ШТЕЙНЕРА

Целью этого этапа оптимизации является построение такой сети Штейнера, любая подсеть  $P$ -й размерности которой оптимальна. Задача решается методом динамической декомпозиции. Пусть  $i$  – текущая вершина сети Штейнера в процессе оптимизации структуры сети. Обозначим:

- $P_1$  – подсеть сети Штейнера, стягивающая множество  $M_i^P$  вершин не более чем  $P$  – достижимых из  $i$ ;
- $M_i^{P-1}$  – множество вершин  $(P-1)$  – достижимых из вершины  $i$ ;
- $\bar{M}_i^P$  –  $P$  достижимых, но не  $(P-1)$  – достижимых вершин – внутренний контур сети;
- $\bar{M}_i^{P+1}$  –  $(P+1)$  достижимых, но не  $P$  – достижимых вершин – внешний контур сети.

*Схема алгоритма построения сети:*

1. Выделяется текущая вершина  $i$  сети Штейнера.

2. Определяются  $P_i$  – подсеть и множества  $M_i^{P-1}, \bar{M}_i^P, \bar{M}_i^{P+1}$ .  
 3. Устраняются все дуги между вершинами из  $M_i^P$   $P_i$ -й подсети.  
 4. Решается задача оптимизации координат точек Штейнера сформированной подсети и определяется ее стоимость. При этом точки Штейнера множества вершин  $M_i^{P-1}$  подвижны и могут менять структуру подсети, точки множества  $\bar{M}_i^P$ , составляющие внешний контур, могут изменять координаты, но не структуру подсети, точки множества  $\bar{M}_i^{P+1}$ , образующие внешний контур подсети, фиксированы для соблюдения граничных условий подсети с остальной сетью Штейнера.

5. Пункт 4 повторяется для всех генерируемых альтернативных подсетей Штейнера текущей вершины  $i$  с отбором оптимальной по стоимости коммуникаций. Далее переходим к оптимизации  $P_{i+1}$ -й подсети сети Штейнера.

Процесс оптимизации структуры сети завершается при построении такой сети Штейнера, любая подсеть  $P$ -го ранга которой оптимальна.

*Переходим к удалению из полученной 2-оптимальной сети Штейнера неэффективных точек Штейнера*

6. Удаление из полученной 2-оптимальной потоковой сети Штейнера тех точек Штейнера, которые расположены достаточно близко к узлам потоковой сети, т.е.

$$\sqrt{(x_i - x_{jш})^2 + (y_i - y_{jш})^2} \leq r,$$

где  $(x_i, y_i)$  – координаты узловой точки  $i$ ,  $(x_{jш}, y_{jш})$  – координаты точки Штейнера, связанной ветвью  $ij$  с вершиной  $i$ ,  $r$  – заданная величина.

7. Слияние точек Штейнера, связанных ветвью и находящихся на расстоянии

$$\sqrt{(x_{iш} - x_{jш})^2 + (y_{iш} - y_{jш})^2} \leq r.$$

8. Оптимизация координат оставшихся  $k$  точек Штейнера градиентным методом по отношению к 2-достижимым вершинам сети.

9. Оценка значения  $(Z_k + kC)$ , где  $Z_k$  – стоимость сети Штейнера с  $k$  вершинами Штейнера,  $C$  – стоимость одного узла соединения трубопроводов сети в точке Штейнера.

10. Оценка разности значений  $\Delta_{\bar{k},k} = (Z_{\bar{k}} + \bar{k}C) - (Z_k + kC)$ , где  $\bar{k}$  – количество точек Штейнера на предыдущем цикле оптимизации  $i$ -й подсети,  $k$  – на данном цикле.

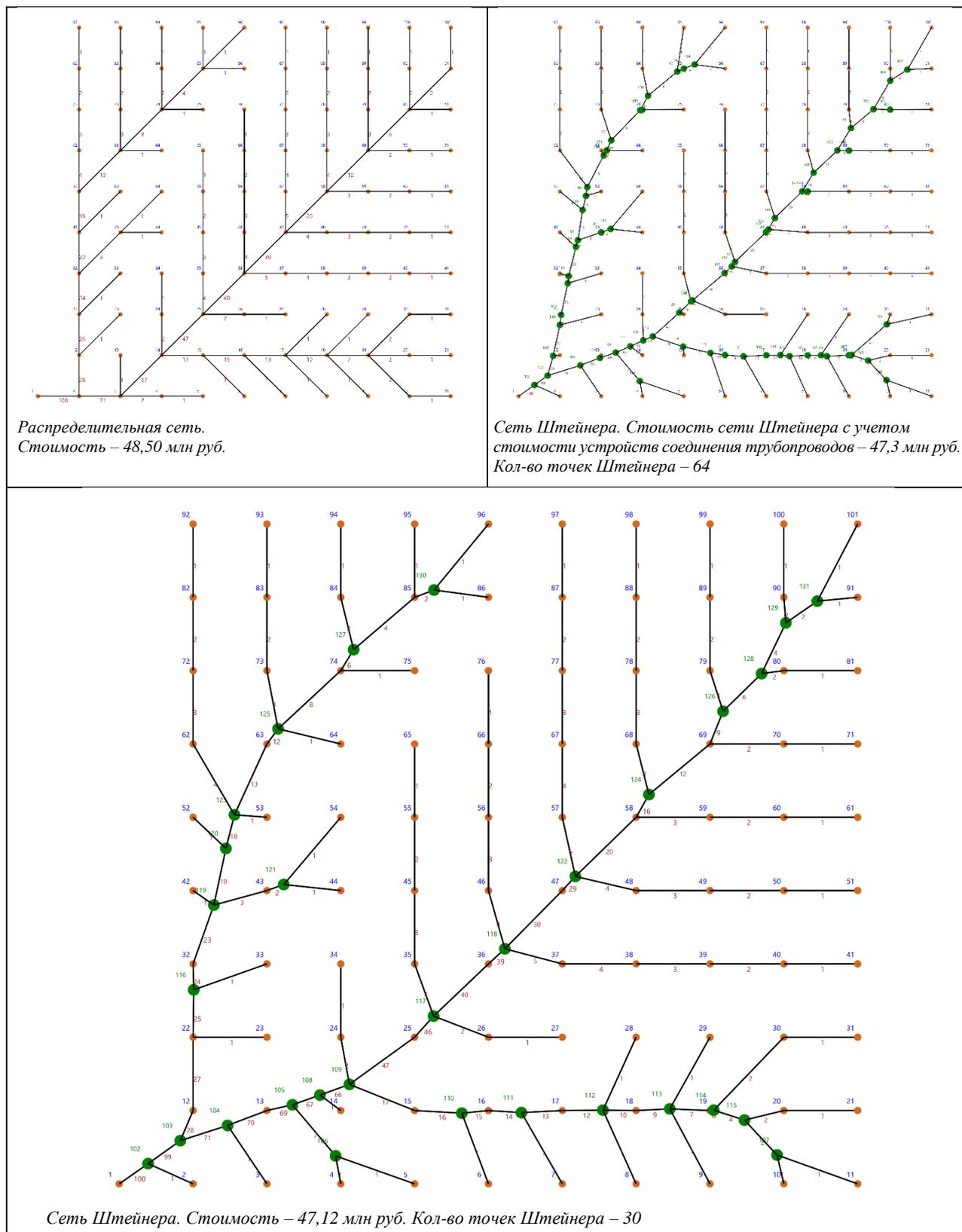
11. Если  $\Delta_{\bar{k}}^k \geq 0$ ,  $r := r_0 + \tau$ ,  $\tau = \frac{1}{10} r_0$ , где  $r_0$  – значение  $r$  на начальном цикле оптимизации количества точек Штейнера, то переходим на 6.

В противном случае завершается процедура оптимизации количества точек Штейнера в сети. В результатах вычислительного эксперимента приведена таблица, из которой видно, как складывается стоимость сети Штейнера.

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

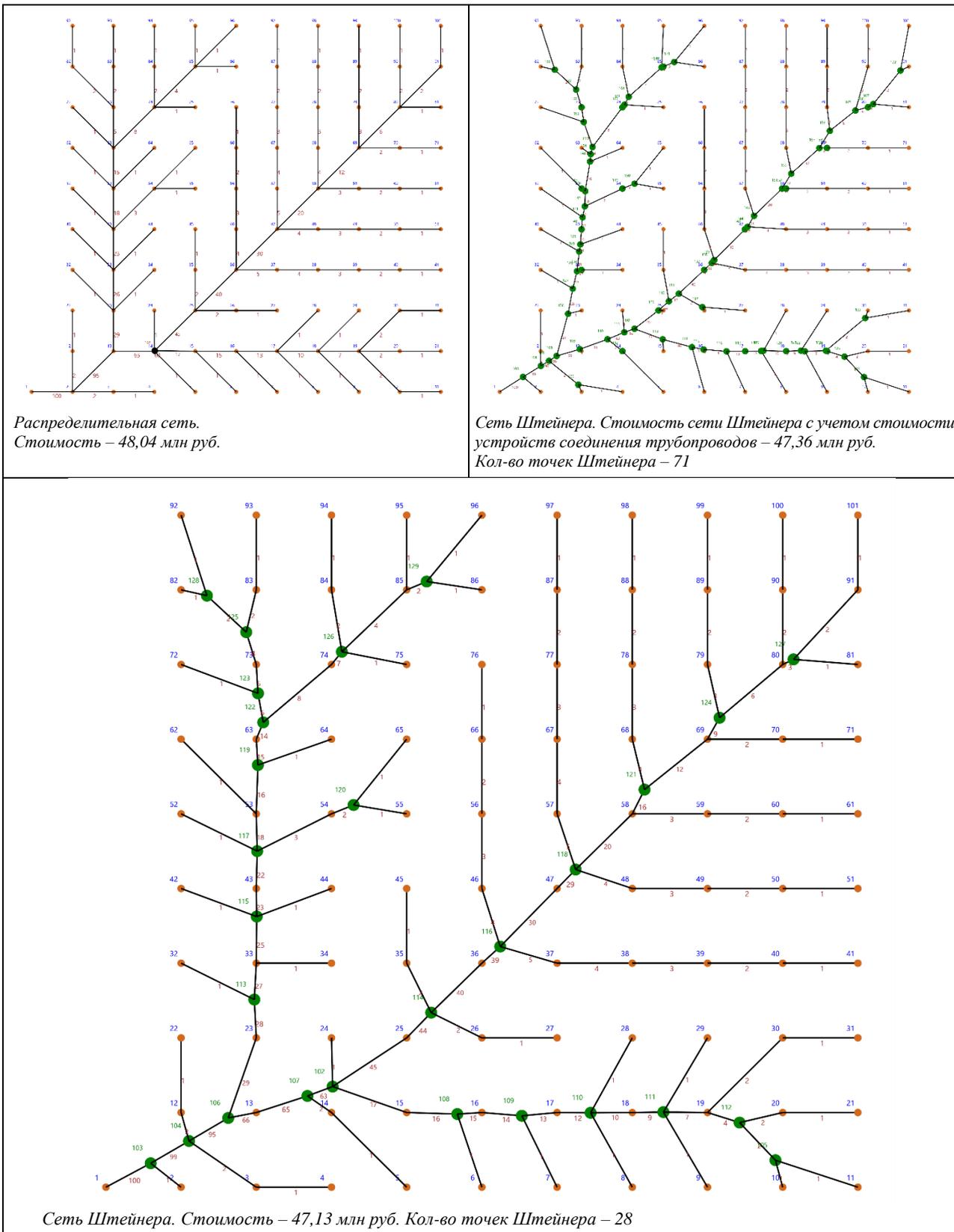
Для наглядности вычислительный эксперимент (ВЭ) проводился для симметричной потоковой сети. На рисунках 2 и 3 представлены структуры 2 наилучших сетей 2-го ранга оптимальности с оптимальным количеством точек Штейнера.

Следует обратить внимание на то, что наилучшая из потоковых распределительных сетей не обязательно переходит в наилучшую сеть Штейнера. Это является основанием для того, чтобы проектировать не одну, а несколько сетей из различных распределительных сетей высокого ранга оптимальности.



*Рис. 2. Наилучшая сеть Штейнера второго ранга оптимальности с оптимальным количеством точек Штейнера. На рисунке жирно обозначены точки Штейнера*

*Fig. 2. The best Steiner network of the second rank of optimality with an optimal number of Steiner points. Steiner points are shown in bold in the figure*



*Рис. 3. Сеть Штейнера второго ранга оптимальности с оптимальным количеством точек Штейнера. На рисунке жирно обозначены точки Штейнера*

*Fig. 3. Steiner network of the second rank of optimality with an optimal number of points Steiner. Steiner points are shown in bold in the figure*

Таблица 2. Результаты расчетов

Table 2. Calculation results

	Стоимость дерева (млн руб.)	Процент оптимизации стоимости (%)	Длина дерева Штейнера (км)	Общий процент оптимизации стоимости (%)
<b>Исходное дерево</b>				
	48,0433			
<b>Результаты 1-го круга (развертка исходного дерева в сеть Штейнера и локальная оптимизация координат точек Штейнера)</b>				
	46,69459	2,807	106,6199	
<b>Результаты 2-го круга (построение сетей Штейнера 2-го ранга оптимальности, т.е. оптимизация Структуры всех фрагментов сети, состоящих из 2-достижимых из каждой вершины сети, и оптимизация координат точек Штейнера в них)</b>				
Итерация №1	46,67786	0,035	106,872	2,843
Итерация №2	46,67126	0,049	106,8064	2,857
Итерация №3	46,66493	0,063	106,8514	2,87
Итерация №4	46,66281	0,068	106,9991	2,875
Итерация №5	46,65607	0,082	107,2535	2,889
Итерация №6	46,65409	0,086	106,9198	2,894
Итерация №7	46,65352	0,087	106,9731	2,895
Итерация №8	46,65347	0,088	106,9853	2,895
<b>Результаты 3-го круга (последовательное удаление точек Штейнера и оптимизация координат оставшихся точек Штейнера)</b>				
<i>Удаление точек Штейнера, стоящих рядом с вершинами</i>				
Расстояние между вершинами сети и точками Штейнера (м)				
5	46,66142	-0,017	106,722	2,876
10	46,66957	-0,034	106,5667	2,859
12,5	46,69772	-0,094	106,3796	2,8
15	46,69772	-0,094	106,3796	2,8
17,5	46,7025	-0,105	106,3002	2,79
20	46,73982	-0,185	105,8862	2,713
25	46,74183	-0,189	105,7392	2,708
30	46,84923	-0,419	105,0578	2,485
<i>Удаление одной из двух рядом стоящих точек Штейнера</i>				
5	46,84923	-0,419	105,0578	2,485
10	46,85267	-0,426	105,0181	2,478
12,5	46,85267	-0,426	105,0181	2,478
15	46,85267	-0,426	105,0181	2,478
17,5	46,8544	-0,43	104,8922	2,474
20	46,85631	-0,434	104,8872	2,47
25	46,85458	-0,431	104,9657	2,474
30	46,85458	-0,431	104,9657	2,474
<b>Конечный результат</b>				
	46,85458	-0,431	104,9657	2,474

**Таблица 3. Итоговые результаты****Table 3. Final results**

Стоимость распределительной сети (млн руб.)	Стоимость исходной сети Штейнера (млн руб.)	Кол-во точек Штейнера (шт.)	Стоимость сети Штейнера после удаления неэффективных точек Штейнера (млн руб.)	Кол-во точек Штейнера после удаления неэффективных точек Штейнера (шт.)	Процент оптимизации (%)
48,04	47,36	71	47,13	28	1,89
48,5	47,3	64	47,12	30	2,85
49,3	47,7	51	47,5	22	3,65

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан метод построения потоковых сетей Штейнера 2-го ранга оптимальности с оптимальным количеством точек Штейнера. Метод состоит в последовательном удалении из полученной потоковой сети точек Штейнера, достаточно близко расположенных к узлам сети и друг к другу, и последующей оптимизации координат эффективных точек Штейнера.

Разработана компьютерная система проектирования указанных потоковых сетей, предназначенная для проектирования больших трубопроводных распределительных сетей регионального и межрегионального водоснабжения. Метод и компьютерная система рассчитаны на проектирование нескольких сетей равного ранга оптимальности и различной структуры, что важно для проектных организаций, т.к. обеспечивает возможность выбора из них наилучшей с точки зрения проектировщиков.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кудяев В. Ч. Ранги экстремумов и структурная оптимизация больших сетевых систем // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2016. № 4(72). С. 15–24.
2. Кудяев В. Ч., Багов М. А. Построение потоковой сети Штейнера 2-го ранга оптимальности // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. Т. 154. 2018. С. 32–42.
3. Абазоков М. Б., Багов М. А., Кудяев В. Ч. Компьютерное проектирование больших трубопроводных сетей высокого ранга оптимальности // Доклады Адыгской (Черкесской) международной академии наук. 2022. Т. 22. № 4. С. 39–56. DOI: <https://doi.org/10.47928/1726-9946-2022-22-4-39-56>
4. Меренков А. П., Сеннова Е. В., Сумароков С. В. и др. Математическое моделирование и оптимизация систем тепло-, водо-, нефте- и газоснабжения. Новосибирск: Наука, 1992. 407 с.
5. Абрамов Н. Н., Поспелова М. М., Сомов М. А., Варанаев В. Н., Керимова Д. Х. Расчет водопроводных сетей. Москва: Стройиздат, 1983. 278 с.
6. Гилберт Э. Н., Поллак Г. О. Минимальные деревья Штейнера // Кибернетический сборник. Новая серия. Вып. 8. 1971. С. 19–49.
7. Gilbert E.N. Minimal Cost Communication Networks. Bell System technological Journal. 1967. No. 9. Pp. 48–50.

### REFERENCES

1. Kudaev V.Ch. Ranks of extrema and structural optimization of large network systems. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS*. 2016. No. 4(72). Pp. 15–24. (In Russian)

2. Kudaev V.Ch., Bagov M.A. Construction of a Steiner stream network of the 2nd rank of optimality. *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz.* Vol. 253. 2021. Pp. 488–499. (In Russian)
3. Abazokov M.B., Bagov M.A., Kudaev V.Ch. Computer design of large pipeline networks of high optimality rank. *Doklady AMAN* [Reports of AMAN]. 2022. Vol. 22. No. 4. Pp. 39–56. DOI: <https://doi.org/10.47928/1726-9946-2022-22-4-39-56>. (In Russian)
4. Merenkov A.P., Sennova E.V., Sumarokov S.V. et al. *Matematicheskoye modelirovaniye i optimizatsiya sistem teplo-, vodo-, nefte- i gazosnobzheniya* [Mathematical modeling and optimization of heat, water, oil and gas supply systems]. Novosibirsk: Nauka, 1992. 407 p. (In Russian)
5. Abramov N.N., Pospelova M.M., Somov M.A., Varapaev V.N., Kerimova D.Kh. *Raschet vodoprovodnykh setey* [Calculation of water supply networks]. Moscow: Stroyizdat, 1983. 278 p. (In Russian)
6. Gilbert E.N., Pollak G.O. Minimal Steiner trees. *Kiberneticheskiy sbornik* [Cybernetic collection]. New series. 1971. Vol. 8. Pp. 19–49. (In Russian)
8. Gilbert E.N. Minimal Cost Communication Networks. *Bell System technological Journal*. 1967. No. 9. Pp. 48–50.

### Информация об авторе

**Багов Марат Алиевич**, науч. сотр. отдела вычислительных методов, Институт прикладной математики и автоматизации – филиал Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук;

360000, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А;

maratniipma@mail.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0899-898X>

### Information about the author

**Bagov Marat Alievich**, Researcher of the Department of Computational Methods, Institute of Applied Mathematics and Automation – branch of Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences;

360000, Russia, Nalchik, 89 A Shortanov street;

maratniipma@mail.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0899-898X>