МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 519.65 Научная статья
DOI: 10.35330/1991-6639-2023-4-114-55-60
EDN: ERYXGL

Численный метод решения оптимизационной задачи траекторного управления и поддержания формации группой автономных БПЛА с прогнозирующими моделями

К. Ю. Ганьшин, Д. Л. Винокурский, О. С. Мезенцева, Ф. В. Самойлов

Северо-Кавказский федеральный университет
355017, Россия, г. Ставрополь, ул. Пушкина, 1

Аннотация. Статья посвящена разработке численного метода решения оптимизационной задачи траекторного управления единичным БПЛА на основе метода штрафных функций с вычислительным ускорением. Описан численный метод поиска решения задачи траекторного управления, которая представлена в виде задачи квадратичного программирования, использующий метод штрафных функций с вычислительным ускорением Эйткина.

Ключевые слова: алгоритмы генерации траекторий, математическая модель БПЛА, численный метод, ускорение Эйткина, штрафная функция, Лагранж

Поступила 24.07.2023, одобрена после рецензирования 26.07.2023, принята к публикации 04.08.2023

Для цитирования. Ганьшин К. Ю., Винокурский Д. Л., Мезенцева О. С., Самойлов Ф. В. Численный метод решения оптимизационной задачи траекторного управления и поддержания формации группой автономных БПЛА с прогнозирующими моделями // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2023. № 4(114). С. 55–60. DOI: 10.35330/1991-6639-2023-4-114-55-60

Original article

Numerical method for solving the optimization problem of trajectory control and formation maintenance by a group of autonomous UAVs with predictive models

K.Yu. Ganshin, D.L. Vinokursky, O.S. Mezentseva, Ph.V. Samoilov

North-Caucasus Federal University
355017, Russia, Stavropol, 1, Pushkin street

Abstract. The article is devoted to the development of a numerical method for solving the optimization problem of trajectory control of a single UAV based on the penalty functions method with computational acceleration. The article described a numerical method for finding a solution to the trajectory control problem, presented as a quadratic programming problem, using the penalty function method with Aitken's computational acceleration.

Keywords: trajectory generation algorithms, UAV mathematical model, numerical method, Aitken's acceleration, penalty function, Lagrange

Submitted 24.07.2023, approved after reviewing 26.07.2023, accepted for publication 04.08.2023

For citation. Ganshin K.Yu., Vinokursky D.L., Mezentseva O.S., Samoilov F.V. Numerical method for solving the optimization problem of trajectory control and formation maintenance by a group of autonomous UAVs with predictive models. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS.* 2023. No. 4(114). Pp. 55–60. DOI: 10.35330/1991-6639-2023-4-114-55-60

Математическая модель БПЛА в форме Лагранжа

Система управления на основе методов Model predictive control (MPC) [1–3] использует кинематическую модель реального объекта, который должен подвергаться управляющим воздействиям. Наиболее распространены записи кинематических моделей в формах уравнений Лагранжа и Гамильтона. В данном случае применяется форма Лагранжа из-за явного использования обобщенных скоростей в отличие от формы Гамильтона [4], где уравнения используют обобщенные импульсы.

Представим математическую модель четырехроторного БПЛА в форме Лагранжа. Для этого приведем обобщенный лагранжиан L, который представляет собой разность кинетической и потенциальной энергий моделируемого объекта. В случае квадрокоптера [5–7] рассматриваемая модель может быть основана на модели абсолютно твердого тела [8]:

$$L(q,\dot{q}) = T(\dot{q}) - U(q), \tag{1}$$

где $T(\dot{q})$, $U(q)$ – кинетическая и потенциальная энергия соответственно.

Из-за возможности БПЛА вращаться вокруг трех осей относительно собственного центра масс представим кинетическую энергию в форме Кенинга:

$$T = T_0 + T_r = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}, \tag{2}$$

где T_0, T_r – энергия движения центра масс и энергия движения относительно центра масс соответственно, v, ω – линейная и угловая скорости объекта, I – его момент инерции.

Таким образом, Лагранжиан квадрокоптера примет следующий вид:

$$L(q,\dot{q}) = T_0(\dot{q}) + T_r(\dot{q}) - U(q) = \frac{m}{2}\dot{\xi}^T\dot{\xi} + \frac{1}{2}v^T I v - mgz. \tag{3}$$

Использование метода штрафных функций

Метод штрафных функций является одним из наиболее распространенных методов решения задач оптимального управления. Идея метода состоит в приближенном решении задачи минимизации при ограничениях и сведении ее к решению задачи минимизации целевой функции без ограничений. При этом вспомогательная функция выбирается так, чтобы она совпадала с минимизированной функцией внутри области допустимых решений и быстро возрастала вне ее [9]. Допустим, что исследуется задача при ограничениях:

$$\begin{cases} \min f_0(x) \\ f_1(x) \le 0, i = 1,2 \dots n. \end{cases} \tag{4}$$

Составим функцию:

$$\varphi_0(t) \begin{cases} t^2, t \ge 0 \\ 0, t < 0; \end{cases} \tag{5}$$

$$S(x,r) = r\sum_{i=1}^{n} \varphi_0\left(f_i(x)\right), \tag{6}$$

тогда легко видеть, что *S(x,r)* внутри области допустимых решений. Если же точку x взять вне этой области, то *S(x,r)>0* и $S(x,r) \to +\infty$ при $r \to \infty$.

Вспомогательная задача теперь состоит в минимизации $F(x,r) = f_0(x) + S(x,r)$. Ожидаемо, что решение этой задачи будет близким к решению исходной задачи [10]. В общем случае она строится так, чтобы график ее функции был гладким.

Пусть имеется задача минимизировать значение функции при ограничениях

$$\begin{gathered} \min f_0(x) \\ f_1(x) \leq 0, i = 1{,}2 \ldots n, \end{gathered} \tag{7}$$

которая далее будет разобрана поэтапно.

Этап подготовки: выбрать в качестве константы остановки $\varepsilon > 0$ начальную допустимую точку $x^0 \in R^n$, для которой $f_i(x) \leq 0$, скаляр r_0 и $0 < \beta < 1$. Положить, что k=1, и перейти к основному этапу.

Главный итерационный процесс: *k-я итерация*.

Шаг 1.

При исходной точке x_k решить следующую задачу безусловной оптимизации:

$$\min F(x,r) = f_0(x) + S(x,r), \tag{8}$$

где $r > 00$ – параметр, значения которого убывают на каждой итерации.

Примерами штрафных функций являются:

1) обратная функция $S_i(x,r) = 1/f_i(x), i = 1{,}2, \ldots, n$;

2) логарифмическая функция $S_i(x,r) = -\ln f_i(x)),\ i = 1{,}2, \ldots, n$.

Положить x_{k+1} равным оптимальному решению задачи минимизации и перейти ко второму шагу.

Минимизация штрафной функции может быть выполнена любым методом безусловной оптимизации, например, градиентным [11].

Шаг 2.

Если $S(x,r) < \varepsilon$, то остановиться. Решение является искомым.

В противном случае положить, что $r_{k+1} = \ \beta_{rk}$. Изменить $k = \ k + 1$ и перейти к первому шагу (k+1)-й итерации.

Далее используем метод Эйткина [12] для ускорения вычислений по методу штрафных функций. С помощью этого метода можно добиться ускорения сходимости итерационных методов.

Пусть по методу штрафных функций получены точки x_{k-1}, x_k, x_{k+1}. Эти точки должны удовлетворять системе ограничений задачи $f_i(x) \leq 0$. Тогда будем определять каждое последующее значение из формулы

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2}} \tag{9}$$

при условии $f_i(x_{n+2}) \leq 0$.

Графическая интерпретация метода представлена на рисунке 1. Блок-схема всего численного метода изображена на рисунке 2.

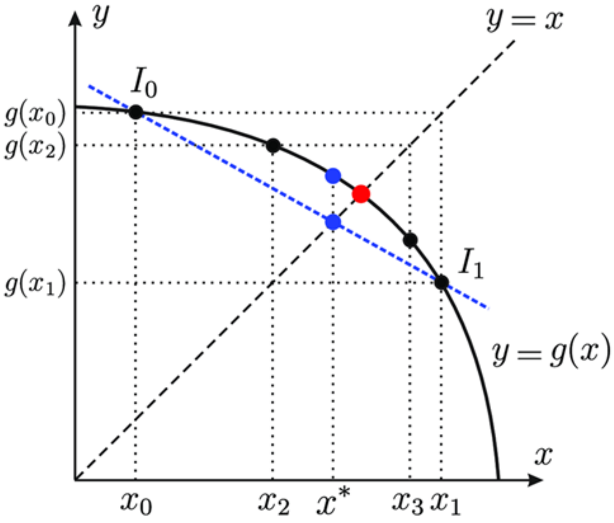

Рис. 1. *Графическое представление поиска точки решения с ускорением Эйткина*

Fig. 1. *Graphical representation of the search for a solution point with Aitken's acceleration*

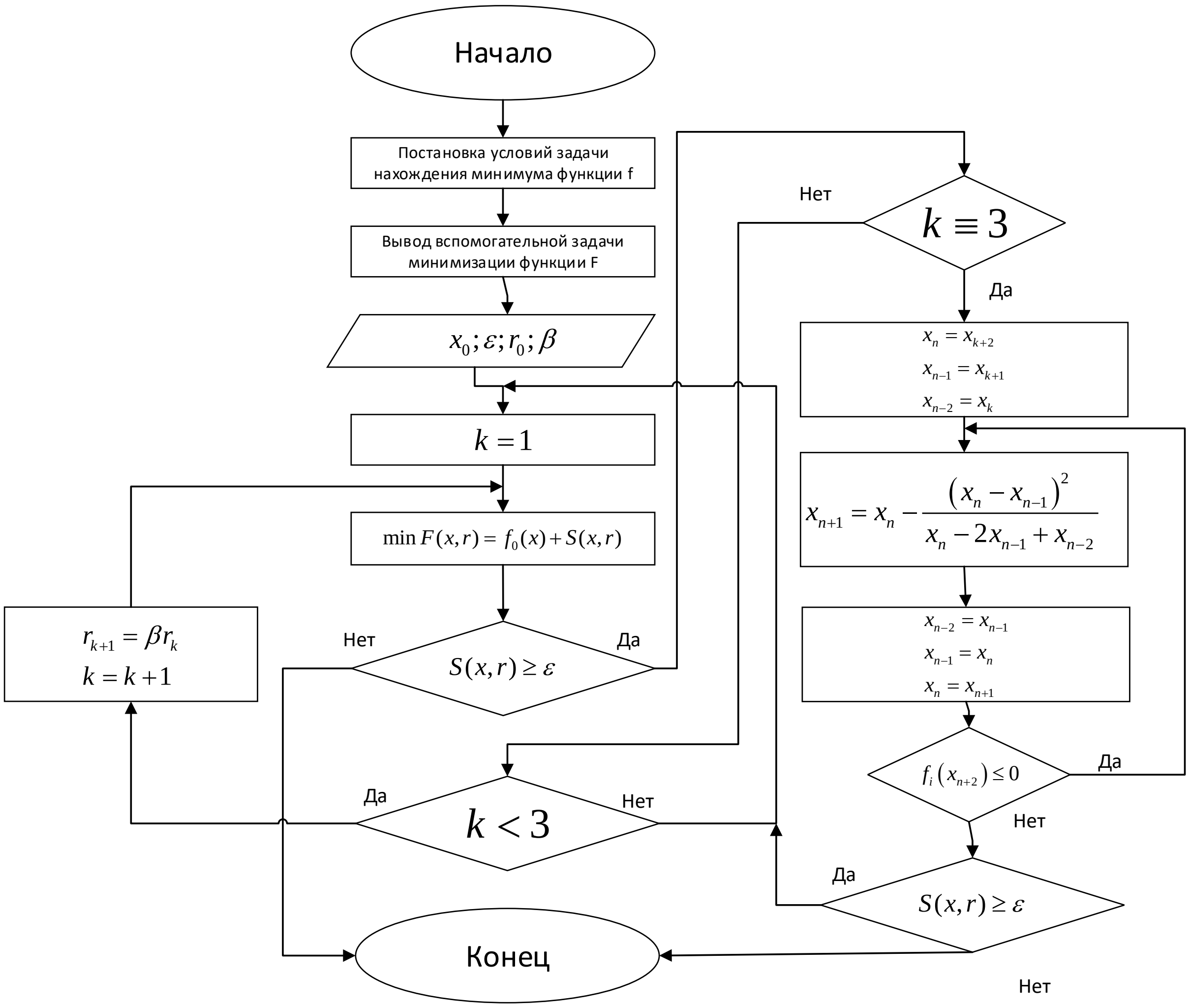

Рис. 2. *Блок-схема разработанного метода поиска оптимального решения на основе метода штрафных функций и ускорения Эйткина*

Fig. 2. *Block diagram of the developed method for finding the optimal solution based on the method of penalty functions and Aitken's acceleration*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная статья посвящена разработке численного метода решения оптимизационной задачи траекторного управления единичным БПЛА, отличающегося от известных использованием прогнозирующих моделей на основе метода штрафных функций с вычислительным ускорением. Описана математическая модель БПЛА в форме Лагранжа.

В статье был разработан и описан численный метод поиска решения задачи траекторного управления, которая представлена в виде задачи квадратичного программирования, использующий метод штрафных функций с вычислительным ускорением Эйткина.

REFERENCES

1. *Jezierski A.* A comparison of LQR and MPC control algorithms of an inverted pendulum / A. Jezierski, J. Mozaryn, D. Suski. Advances in Intelligent Systems and Computing. Cham: Springer International Publishing. 2017. Pp. 65–76.

2. *Ławryńczuk M.* Introduction to model predictive control // in book «Nonlinear Predictive Control Using Wiener Models». Cham: Springer International Publishing. 2022. Pp. 3–40.

3. *Richalet J.,* Rault A., Testud J. et al. Model predictive heuristic control. Automatica (Oxf.). 1978. No. 14 (5). Pp. 413–428.

4. *Виноградов А. М., Красильчик И. С.* Что такое гамильтонов формализм? // УМН. 1975. Т. 30. No. 1(181). С. 173–198.

Vinogradov A.M., Krasil’shchik I.S. What is the Hamiltonian formalism? Russian mathematical surveys. 1975. Vol. 30. No. 1. Pp. 177–202.

5. *Garcia G.A., Kim A.R., Jackson E. et al.* Modeling and flight control of a commercial nano quadrotor // International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS). IEEE. 2017. DOI: 10.1109/icuas.2017.7991439-2017.

6. *Chinedu Amata Amadi W.S.* Design and implementation of Model Predictive Control on Pixhawk Flight Controller. Stellenbosch University. 2018.

7. *Giernacki W., Skwierczynski M., Witwicki W. et al.* Crazyflie 2.0 quadrotor as a platform for research and education in robotics and control engineering. 22nd International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR). IEEE. 2017. DOI: 10.1109/mmar.2017.8046794-2017.

8. *Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики // Динамические системы – 3, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. ВИНИТИ: М., 1985. № 3. С. 5–290.

Arnold V.I., Kozlov V.V., Nejshtadt A.I. Mathematical aspects of classical and celestial mechanics. *Itogi Nauki i Tekhniki. Seriya Sovremennye Problemy Matematiki. Fundamental’nye Napravleniya*. 1985. No. 3. Pp. 5–290. (in Russian)

9. *Wills A.G., Heath W.P.* Barrier function based model predictive control. Automatica: the journal of IFAC, the International Federation of Automatic Control. 2004. No. 8(40). Pp. 1415–1422.

10. *Gopal V., Biegler L.T.* Large scale inequality constrained optimization and control. IEEE Control Systems Magazine. 1998. No. 18(6). Pp. 59–68.

11. *Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. Ленинград: Наука, 1975.

Faddeev D.K., Faddeeva V.N. Vychislitel'nyye metody lineynoy algebry [Computational methods of linear algebra]. Leningrad: Nauka, 1975 (in Russian)

12. *Aitken A.C.* XXV. – On Bernoulli's numerical solution of algebraic equations. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. 1927. (46). Pp. 289–305.

Информация об авторах

Ганьшин Константин Юрьевич, аспирант, Институт информационных технологий и телекоммуникаций, Северо-Кавказский федеральный университет;

355017, Россия, г. Ставрополь, ул. Пушкина, 1;

ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7495-0736

Винокурский Дмитрий Леонидович, канд. физ.-мат. наук, доцент, Институт информационных технологий и телекоммуникаций, Северо-Кавказский федеральный университет;

355017, Россия, г. Ставрополь, ул. Пушкина, 1;

dlvinokursky@gmail.com, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5225-8076

Мезенцева Оксана Станиславовна, канд. физ.-мат. наук, доцент, Институт информационных технологий и телекоммуникаций, Северо-Кавказский федеральный университет;

355017, Россия, г. Ставрополь, ул. Пушкина, 1;

ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5503-1056

Самойлов Филипп Владимирович, доцент, Институт информационных технологий и телекоммуникаций, Северо-Кавказский федеральный университет;

355017, Россия, г. Ставрополь, ул. Пушкина, 1;

ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3555-4479

Information about the authors

Ganshin Konstantin Yuryevich, graduate student, Institute of Information Technologies and Telecommunications, North-Caucasus Federal University;

355017, Russia, Stavropol, 1, Pushkin street;

ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7495-0736

Vinokursky Dmitry Leonidovich, Ph.D. (Phys. & Math.), Associate Professor, Institute of Information Technologies and Telecommunications, North-Caucasus Federal University;

355017, Russia, Stavropol, 1, Pushkin street;

dlvinokursky@gmail.com, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5225-8076

Mezentseva Oksana Stanislavovna, Ph.D. (Phys. & Math.) Associate Professor, Institute of Information Technologies and Telecommunications, North-Caucasus Federal University;

355017, Russia, Stavropol, 1, Pushkin street;

ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5503-1056

Samoilov Philipp Vladimirovich, Ph.D. (Phys. & Math.), Associate Professor, Institute of Information Technologies and Telecommunications, North-Caucasus Federal University;

355017, Russia, Stavropol, 1, Pushkin street;

ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3555-4479