

Трассировка больших разветвленных трубопроводных гидравлических сетей высокого ранга оптимальности на динамическом базовом графе

М. Б. Абазоков, В. Ч. Кудяев

Институт прикладной математики и автоматизации –
филиал Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук
360000, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А

Аннотация. В статье представлен метод трассировки больших разветвленных трубопроводных гидравлических сетей высокого ранга оптимальности. Новизна метода состоит в том, что в процессе увеличения ранга оптимизации проектируемых сетей динамически снижается размерность заданного избыточного графа возможных соединений узлов сети друг с другом. При этом избыточный граф возможных соединений узлов сети последующего ранга формируется из сетей предыдущего ранга оптимальности. Метод обеспечивает компьютерное решение задачи трассировки больших сетей, содержащих более ста узлов, седьмого ранга оптимальности. Система предназначена для компьютерного проектирования больших трубопроводных сетей регионального и межрегионального водоснабжения и трубопроводных оросительных сетей.

Ключевые слова: трубопроводная потоковая сеть, компьютерное проектирование, трассировка, динамический граф возможных соединений узлов сети, снижение размерности, увеличение ранга оптимальности

Поступила 26.07.2023, одобрена после рецензирования 03.08.2023, принята к публикации 08.08.2023

Для цитирования. Абазоков М. Б., Кудяев В. Ч. Трассировка больших разветвленных трубопроводных гидравлических сетей высокого ранга оптимальности на динамическом базовом графе // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2023. № 4(114). С. 39–54. DOI: 10.35330/1991-6639-2023-4-114-39-54

MSC: 90C27; 90C90

Original article

Tracing of large branched pipeline hydraulic networks of high optimality rank with graph presentation

M.B. Abazokov, V.Ch. Kudaev

Institute of Applied Mathematics and Automation –
branch of Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences
360000, Russia, Nalchik, 89 A Shortanov street

Abstract. The paper deals with a tracing technique for large branched pipeline hydraulic networks of the high optimality rank. The novelty of the method is that while increasing the optimization rank of the designed networks, the redundant graph of possible connections between nodes is dynamically reduced. In this case, the redundant graph of the follow-up rank is formed from previous networks rank. The method provides a computer solution to the problem of tracing of large networks containing more than one

hundred nodes of the seventh optimality rank. The system is developed for large pipeline networks design of regional and interregional pipe distribution network (PDN) for irrigation purpose.

Keywords: pipeline flow network, computer design, tracing, dynamic graph of possible connections of network nodes, dimension reduction, optimality rank increase

Submitted 26.07.2023,

approved after reviewing 03.08.2023,

accepted for publication 08.08.2023

For citation. Abazokov M.B., Kudaev V.Ch. Tracing of large branched pipeline hydraulic networks of high optimality rank with graph presentation. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS.* 2023. No. 4(114). Pp. 39–54. DOI: 10.35330/1991-6639-2023-4-114-39-54

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СИНТЕЗА РАЗВЕТВЛЕННОЙ ПОТОКОВОЙ СЕТИ

Задача синтеза потоковой сети состоит в следующем:

$$z(x) = \sum_{ij \in D} c_{ij}(x_{ij})l_{ij} \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$\sum_{i \in \Gamma_j^+} x_{ij} - \sum_{k \in \Gamma_j^-} x_{jk} = g_i \quad \forall j \neq 1 \in B, \quad (2)$$

$$\sum_{j \in \Gamma_j^-} x_{1j} = Q, \quad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall (i, j) \in D, \quad (4)$$

где $\Gamma(B, D)$ – заданный избыточный граф возможных соединений вершин сети; B и D – множества его вершин и дуг; x_{ij}, c_{ij}, l_{ij} – искомое значение величины потока, заданные удельная стоимость и длина (i, j) -й дуги; Q – заданный поток в сеть; g_i – заданный расход потока в i -м узле сети; Γ_j^+ и Γ_j^- – множества дуг, входящих и исходящих из узла j .

Функция $c_{ij}(x_{ij})$ для любой дуги $(i, j) \in D$ является гладкой и строго вогнутой. Вследствие этого локальный и глобальный экстремумы задачи могут достигаться только в вершинах транспортного многогранника (2–4). Задача является существенно многоэкстремальной.

2. СУЩЕСТВУЮЩИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ И ИХ НЕДОСТАТКИ

Недостатки существующих методов [1–3] рассмотрены в монографии [4, с. 114–123]. Основным же недостатком состоит в том, что уже при $n > 80$ (где n – количество узлов сети) существующие методы решения задачи не срабатывают.

Рассмотрим наиболее известные методы решения задачи: метод погружения и метод ветвей и границ.

2.1. МЕТОД ПОГРУЖЕНИЯ

Метод погружения для решения задачи минимизации вогнутой функции на выпуклом многограннике изложен в работе [5]. В работах [1–2] метод модифицирован для решения задачи синтеза потоковой сети с целевой функцией (1) на транспортном многограннике (2–4).

Суть метода состоит в следующем. Из текущей угловой точки выпуклого многогранника ограничений переходим в такую смежную к ней, в которой значение целевой функции меньше, чем в исходной. При достижении угловой точки транспортного многогранника, в которой значение целевой функции меньше, чем в смежных с ней, проводим из этой угловой точки прямые, проходящие по ребрам многогранника ограничений через смежные с

ней точки вне многогранника, и определяем на них точки, в которых целевая функция достигает того же значения, что и в исходной угловой точке локального экстремума. По этим точкам проводится секущая гиперплоскость, отделяющая от многогранника ограниченный полученный симплекс, вершиной которого является точка локального экстремума, запоминается значение целевой функции в этой угловой точке. Далее определяется на полученном многограннике следующая точка экстремума и т.д. до тех пор, пока на очередной итерации текущий многогранник не будет целиком погружен в отсекаемую часть. После этого определяется та из отсеченных угловых точек, в которой значение локального экстремума целевой функции минимально.

В монографии [4, с. 131–132] отмечен следующий недостаток метода: «При $n = 51$ возникли трудности из-за медленной сходимости вычислительного процесса отсечений. Поэтому было предложено осуществлять сдвиг отсекающей гиперплоскости на некоторую величину h , что привело к труднорешаемой проблеме выбора данной величины: при повышенном значении h пропускаются локальные экстремумы целевой функции, а при малых h процесс оптимизации требует чрезмерного машинного времени».

2.2. МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

Метод ветвей и границ, представленный в работе [3], основан на последовательном делении множества допустимых решений с отбрасыванием подмножеств, которые имеют высокую нижнюю оценку минимизируемой функции. Теоретически это обеспечивает получение глобального минимума, но с заданной допустимой погрешностью. В монографии [4] отмечено, что если эта величина мала, то процесс сходится медленно. Добавим, что целевая функция аппроксимируется вогнутой кусочно-линейной функцией с несколькими звеньями, что уже дает значительную погрешность в решении задачи минимизации вогнутой функции на транспортном многограннике. Увеличение же количества звеньев приводит к резкому увеличению времени решения задачи.

3. РАНГИ ЭКСТРЕМУМОВ

Для существенно многоэкстремальных задач большой размерности локальный экстремум не информативен, а глобальный, вообще говоря, недостижим. Поэтому в работах [6–8] было введено и использовано понятие ранга экстремума решения задачи синтеза потоковой сети.

Определение 1. Точкой экстремума P -го ранга задачи (1–4) назовем такую угловую точку $\{x_{ij}^*\}_{ij \in D}$ транспортного многогранника (2–4), которая является точкой глобального минимума на выпуклой линейной комбинации вершин многогранника, достижимых из этой точки.

Как известно, любой точке (вершине) транспортного многогранника соответствует базисное решение. Переведем определение 1 на язык теории сетей.

Определение 2. P -фрагментом сети назовем замыкаемые любыми P хордами графа $\Gamma(B, D)$ P контуров на текущем остовном дереве T графа $\Gamma(B, D)$.

Теорема (условие ранговой оптимальности для сетевой задачи).

1). Отличные от нуля компоненты потокораспределения $\{x_{ij}^*\}_{ij \in D}$ сети P -го ранга выделяют на графе $\Gamma(B, D)$ ориентированное остовное дерево с корнем в источнике сети.

2). Экстремум P -го ранга является глобальным на выпуклой линейной комбинации вершин транспортного многогранника, имеющих смежность в промежутке $[1, P]$ к точке экстремума.

3). Для того чтобы решение $\{x_{ij}^*\}_{ij \in D}$, где $x_{ij} = 0 \forall (i, j) \notin T$, задачи (1–4) было экстремумом P -го ранга, необходимо и достаточно, чтобы оно было оптимально по всем фрагментам P -го ранга на T , т.е.

$$\sum_{(i,j) \in \Phi_{T,P}} c_{ij}(x_{ij}^*) l_{ij} \leq \sum_{(i,j) \in D} c_{ij}(x_{ij}) l_{ij},$$

где $\{x_{ij}\}_{ij \in D}$ – любое допустимое решение задачи, но такое, что $x_{ij} = x_{ij}^* \forall (i, j) \notin \Phi_{T,P}$.

Доказательство теоремы приведено в работе [9].

Условие ранговой оптимальности является конкретизацией системного принципа оптимальности: «Любая часть оптимальной системы оптимальна (при фиксации граничных условий с остальной сетью)».

Метод ранговой оптимизации сетевых систем состоит в сведении оптимизации сети к оптимизации ее фрагментов все более высокого ранга. При этом рассмотрение только связанных P -фрагментов позволяет существенно снизить размерность задачи.

Метод ранговой оптимизации всей потоковой сети представлен в работах [6, 7, 9].

3.1. СУТЬ МЕТОДА РАНГОВОЙ ОПТИМИЗАЦИИ РАЗВЕТВЛЕННОЙ ПОТОКОВОЙ СЕТИ

Метод ранговой оптимизации представлен в работах [6–9]. Суть метода состоит в сведении оптимизации сети к оптимизации ее фрагментов все более высокого ранга.

При оптимизации 1-го ранга на очередной итерации выделяется очередная хорда (i, j) и соответствующий ей фрагмент 1-го ранга (контур сети) на T . Из фрагмента удаляется дуга, встречающаяся хорде. Проведя оптимизацию полученного фрагмента, определяем очередную независимую переменную относительно полученного решения и переходим к оптимизации соответствующего фрагмента. Процесс оптимизации 1-го ранга системы завершается при получении решения, которое не может быть улучшено внесением в оптимизируемое текущее остовное дерево любой из его хорд и соответствующим изменением потоков по образованному при этом контуру.

Далее переходим к оптимизации 2-го ранга. Для этого выделяем на каждой очередной итерации очередную пару хорд и соответствующие им фрагменты 1-го ранга. В том случае, когда эти фрагменты пересекаются, формируем фрагмент 2-го ранга – объединение двух фрагментов 1-го ранга. Решаем задачу оптимизации фрагмента 2-го ранга и переходим к следующей итерации.

Оптимизация системы прекращается при достижении заданного оптимума P -го ранга либо заданного времени решения задачи на компьютере. При этом, если фрагменты P -го ранга не пересекаются, то программная система их не рассматривает, т.к. их оптимизация уже была проведена при построении сети $(P-1)$ -го ранга, что резко снижает размерность задачи синтеза сети. Таким образом, метод ранговой оптимизации сетевых систем состоит в сведении оптимизации сети к оптимизации ее связанных фрагментов P -го ранга.

4. ДИНАМИЧЕСКИЙ БАЗОВЫЙ ГРАФ В ПРОЕКТИРОВАНИИ ПОТОКОВЫХ СЕТЕЙ

4.1. ПЛОТНЫЙ БАЗОВЫЙ ГРАФ

Плотный базовый граф (ПБГ) состоит из 4 вершинных ячеек. Основой алгоритма построения ПБГ является построение ячеек. Каждая ячейка формируется следующим образом:

1. Для каждой текущей вершины i определяется ближайшая к ней вершина $j \in B$.
2. Для вершин i, j определяется ближайшая к ним вершина k , такая, что

$$l_{ik} + l_{jk} \leq l_{ip} + l_{jp}, \forall p \in B, p \neq i, j.$$

3. Определяется ближайшая к вершинам i, j, k вершина r такая, что:

$$l_{ir} + l_{jr} + l_{kr} \leq l_{ip} + l_{jp} + l_{kp}, \forall p \in B, p \neq i, j, k.$$

4. Соединяем вершины ячейки ПБГ дугами.

Ниже на рис. 1 и 2 изображены для наглядности заданные вершины сети и ПБГ. Вершина 0 соответствует источнику сети.

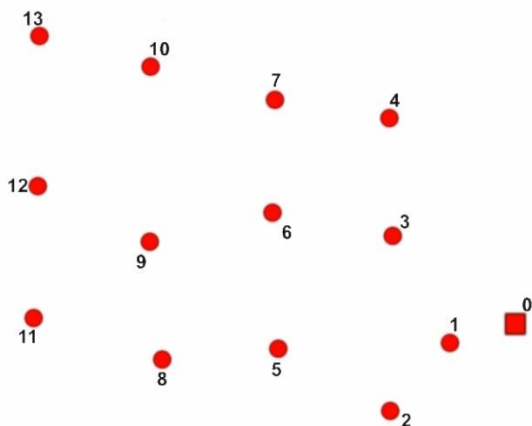


Рис. 1. Вершины потоковой сети

Fig. 1. Nodes of the flow network

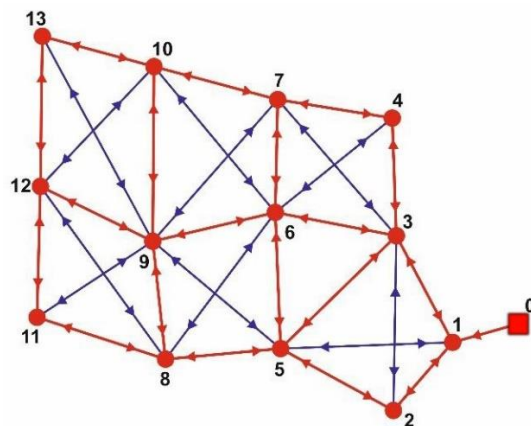


Рис. 2. ПБГ потоковой сети

Fig. 2. Basic dense graph of streaming network

Оценим соотношение времен компьютерного проектирования сети $(P+1)$ -го и P -го рангов на ПБГ $\frac{T_k^{P+1}}{T_k^P}$, где k – количество дуг ПБГ, не являющееся ветвями оптимизируемой на нем сети. Получим:

$$\frac{T_k^{P+1}}{T_k^P} = \frac{C_k^{P+1}}{C_k^P} = \frac{k! P! (k - P)!}{(P + 1)! (k - P - 1)! k!} = \frac{(k - P)}{(P + 1)}.$$

Для ПБГ со 100 вершинами и, значит, примерно с 800 дугами и оптимизируемой на нем 100-вершинной сети со 100 ветвями $k = 800 - 100 = 700$. Тогда получим

$$\frac{T_{700}^4}{T_{700}^3} = \frac{700 - 3}{4} = 174,25.$$

Как следует из проведенных нами экспериментов, T_{700}^3 составляет около 4 часов. Тогда получим $T_{700}^4 = 4 * 174,25(\text{час.}) = 29$ дням.

Отметим следующее:

1. Необходимость использования ПБГ на 1-й фазе оптимального проектирования больших разветвленных потоковых сетей связана с тем, что фактически ПБГ содержит все возможные связи потоками вершин сети друг с другом.

2. Фактическая невозможность использования ПБГ при проектировании больших сетей высокого ранга оптимальности и необходимость перехода при компьютерном проектировании сетей высокого ранга на базовые графы значительно меньшей размерности.

3. Необходимость в силу 1 переноса и коррекции полученных на базовых графах меньшей размерности решений на ПБГ и их коррекции оптимизацией более низкого ранга на ПБГ, что добавляет в РБГ новые перспективные дуги из ПБГ.

4.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗРЕЖЕННОГО БАЗОВОГО ГРАФА (РБГ) И АЛГОРИТМ ЕГО ФОРМИРОВАНИЯ

Пусть задано n остовных деревьев в ПБГ ($n \geq 2$) для проектирования сетей высокого ранга оптимальности.

Разреженный базовый граф (РБГ) – это объединение всех n заданных остовных деревьев, т.е. это граф, множество вершин которого равно множеству вершин ПБГ, и множество дуг которого является объединением множеств ветвей всех n деревьев.

РБГ является подграфом ПБГ.

Определение РБГ

Пусть задано n деревьев $\Gamma_1(V, D_1), \Gamma_2(V, D_2), \dots, \Gamma_n(V, D_n)$, где V – множество вершин, D_i – множество всех ветвей i -го дерева $i = \overline{1, n}$. При этом $D_1 \neq D_2 \neq \dots \neq D_n$, т.е. деревья различны по ветвям, но одинаковы по вершинам.

РБГ = $\Gamma(V, D)$, где $D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$

Алгоритм формирования РБГ

1. Задаются n остовных деревьев $\Gamma_1(V, D_1), \Gamma_2(V, D_2), \dots, \Gamma_n(V, D_n)$.
2. Создается пустой граф $\Gamma(V, D)$.
3. В пустой граф $\Gamma(V, D)$ копируется дерево $\Gamma_1(V, D_1)$.
4. $j := 2$.
5. Если $j \leq n$, то переходим к пункту 6. Иначе конец алгоритма.
6. $D := D \cup D_j$
7. $j := j + 1$ и переходим к пункту 5.

Пример РБГ, составленного из 5 остовных деревьев ПБГ, являющихся 3-оптимальными на ПБГ.

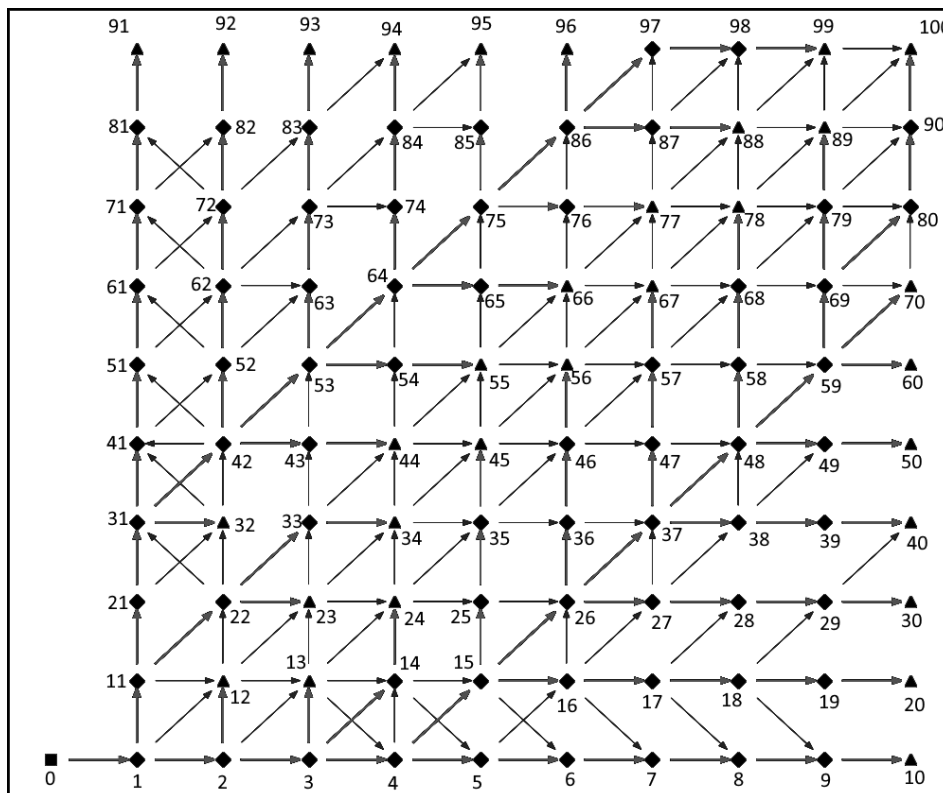


Рис. 3. РБГ из 5 остовных деревьев 3-го ранга оптимальности

Fig. 3. Basic spare of 5 spanning trees of the 3rd optimality rank

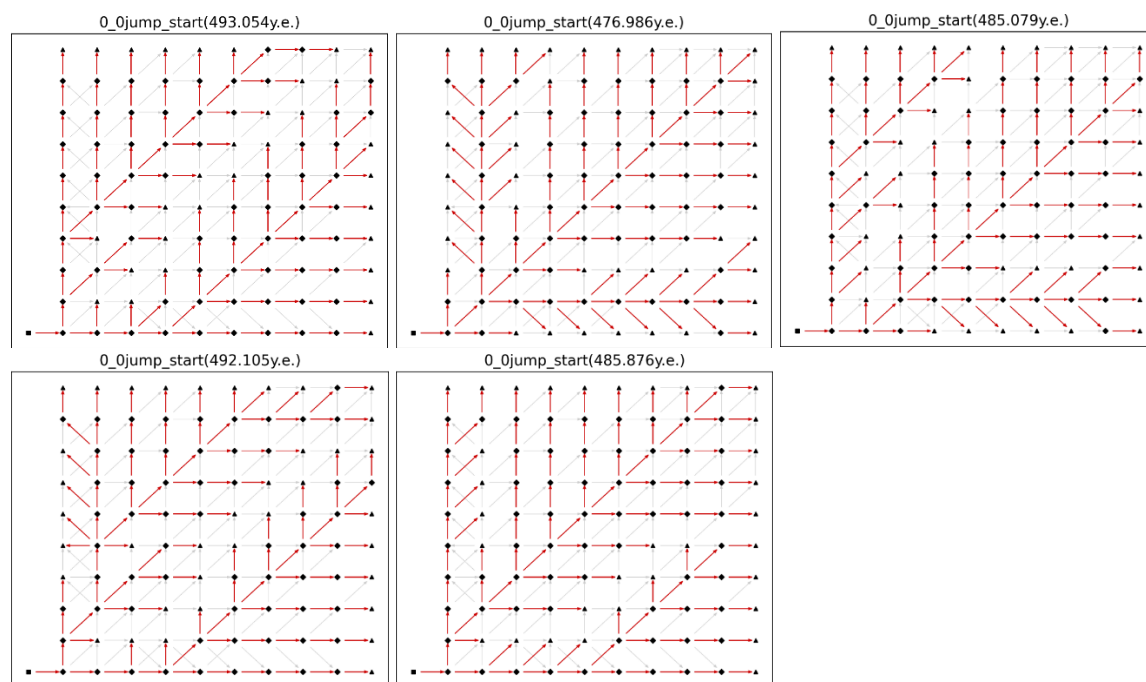


Рис. 4. Остовные деревья 3-го ранга оптимальности

Fig. 4. Spanning trees of the 3rd optimality rank

4.3. СУТЬ МЕТОДА ОПТИМИЗАЦИИ НА ДИНАМИЧЕСКОМ БАЗОВОМ ГРАФЕ

Вначале задается N альтернативных начальных остовных деревьев (НОД) на ПБГ. Определяется максимально возможный достижимый за изначально заданное время T ранг $P_{n,T}$ (далее просто P) и проводится оптимизация этого ранга каждого НОД на ПБГ.

Поскольку дальнейшая оптимизация более высокого ранга, чем P , потоковой сети на ПБГ не эффективна (требует существенно большего времени, чем T), переходим к оптимизации сети на разреженном базовом графе (РБГ), о котором мы говорили ранее.

Запускается цикл, в котором «нужное количество решений» переносятся на РБГ, и проводится оптимизация «соответствующего ранга». Под «нужным количеством решений» подразумевается количество решений на один меньше, чем на предыдущем этапе (в предыдущем цикле), а под «соответствующим рангом» подразумевается ранг на один больше, чем на предыдущем этапе. Другими словами, количество деревьев, из которых формируется РБГ, уменьшается на один, а ранг оптимизации увеличивается на один, т.е. $P_{\text{тек}} + N_{\text{тек}} = \text{const}$, где $P_{\text{тек}}$ – текущий ранг оптимизации, а $N_{\text{тек}}$ – текущее количество деревьев для формирования РБГ.

Нужно учитывать, что

- на каждом этапе берется нужное количество *наилучших* решений (*наименьших по стоимости*), полученных на предыдущем этапе,
- после проведения оптимизации на РБГ соответствующего ранга решения переносятся на ПБГ и проводится их оптимизация $(P - 1)$ ранга (решения соответственно передаются дальше).

Останавливается весь этот процесс (цикл) именно тогда, когда текущее количество деревьев становится равным 1, ибо формирование РБГ из одного дерева не имеет смысла.

Из проведенных экспериментов для множества альтернативных НОД оптимизаций сетей на ПБГ при $T = 12$ часов $P = 3, N = 6$ получим $P + N = 9$.

4.4. АЛГОРИТМ ОПТИМИЗАЦИИ НА ДИНАМИЧЕСКОМ БАЗОВОМ ГРАФЕ

1. Задается N альтернативных начальных остовных деревьев (НОД).
2. Определяется наибольший ранг оптимизации с заданного НОД на ПБГ в течение заданного времени $T - P_{n,T}$ (в дальнейшем будем писать просто P).
3. С каждого НОД проводится оптимизация P -го ранга на ПБГ.
4. Выводятся результаты оптимизации (структура сети, стоимость и значения потоков по ее ветвям). Эти результаты отправляются в пункт 5.1.
5. Переменной i присваиваются все значения от 1 до $(N - 2)$ включительно ($i = 1, (N - 2)$), и для каждого значения i проводятся следующие операции: 5.1–5.4.
 - 5.1. Из $(N - i)$ наилучших решений (наименьший по стоимости) формируется РБГ $(P + i - 1)$ -го ранга (РБГ $^{P+i-1}$).
 - 5.2. На графе РБГ $^{P+i-1}$ с решений, полученных в пункте 5.1, проводится оптимизация $(P + i)$ -го ранга. Результаты оптимизации отправляются в пункт 5.3.
 - 5.3. Полученные в пункте 5.2 решения переносятся на ПБГ и проводится их оптимизация $(P - 1)$ -го ранга.
 Заметим, что значение $(P - 1)$ не зависит от переменной i , т.е. оно неизменно/фиксированно.
- 5.4. Полученные в пункте 5.3 решения отправляются в пункт 5.1.

4.5. ПРИМЕР АЛГОРИТМА ДЛЯ 100-ВЕРШИННОЙ СЕТИ

1. Формирование 6 НОД.
2. Определяется наибольший ранг оптимизации с 6 НОД на ПБГ в течение заданного времени T (это 3-й ранг).
3. 3-оптимальность на ПБГ.
4. Вывод результатов.
5. Формирование РБГ 5 наилучших решений.
6. Оптимизация 4-го ранга на РБГ.
7. Перенос решений на ПБГ.
8. Оптимизация 2-го ранга на ПБГ.
9. Формирование РБГ 4 наилучших решений.
10. Оптимизация 5-го ранга на РБГ.
11. Перенос решений на ПБГ.
12. Оптимизация 2-го ранга на ПБГ.
13. Формирование РБГ 3 наилучших решений.
14. Оптимизация 6-го ранга на РБГ.
14. Перенос решений на ПБГ.
15. Оптимизация 2-го ранга на ПБГ.
17. Формирование РБГ 2 наилучших решений.
18. Оптимизация 7-го ранга на РБГ.
19. Перенос решений на ПБГ.
20. Оптимизация 2-го ранга на ПБГ.

5. ЗАДАЧА ТРАССИРОВКИ ТРУБОПРОВОДНОЙ ГИДРАВЛИЧЕСКОЙ СЕТИ

В работе [4] изложены методы оптимального проектирования разветвленных трубопроводных сетей, разработанные в Сибирском энергетическом институте (г. Иркутск) СО РАН. Основу методов составили работы А. П. Меренкова, В. Я. Хасилева и О. А. Некрасовой [10, 11]. В нашей работе [12] задача оптимального проектирования гидравлической

сети разделена на две фазы. На первой фазе решается (представлен метод) задача трассировки сети. В [12] согласованы обе фазы решения задачи синтеза оптимальной трубопроводной гидравлической сети.

В основе метода лежит зависимость стоимости каждой i -й ветви сети от диаметра трубы на ней, стоимостного коэффициента b и гидравлического коэффициента $0 < \alpha < 2$:

$$c_i = a + bd_i^\alpha. \quad (5)$$

На основе формулы типа Дарси-Вейсбаха $h_i = \frac{kx_i^\beta}{d_i^\gamma}$ получим

$$d_i = \left(\frac{kx_i^\beta}{h_i} \right)^{1/\gamma}. \quad (6)$$

Из (5, 6) получим

$$c_i = a + bk^{\frac{\alpha}{\gamma}} x_i^{\frac{\alpha\beta}{\gamma}} h_i^{-\frac{\alpha}{\gamma}}, \quad c_i l_i = \left(a + bk^{\frac{\alpha}{\gamma}} x_i^{\frac{\alpha\beta}{\gamma}} h_i^{-\frac{\alpha}{\gamma}} \right) l_i. \quad (7)$$

Значения гидравлических и стоимостных коэффициентов по трубам из различных материалов представлены в таблице 1 [11, с. 54–55].

Таблица 1. Гидравлические и стоимостные коэффициенты / **Table 1.** Hydraulic and cost coefficients

Материал труб	Коэффициенты			
	α	β	γ	k
Сталь	1.4	2	5.3	0.001735
Чугун	1.6	2	5.3	0.001735
Асбестоцемент	1.95	1.85	4.89	0.001180
Пластмасса	1.95	1.774	4.774	0.001052

Общие затраты (капитальные и энергетические) на всю сеть оцениваются функцией

$$F_1(x, h) = \sum_i \left(bk^{\frac{\alpha}{\gamma}} x_i^{\frac{\alpha\beta}{\gamma}} h_i^{-\frac{\alpha}{\gamma}} + px_i h_i \right) l_i. \quad (8)$$

Поскольку функция затрат (8) выпуклая и гладкая по h_i , то

$$\frac{\partial F_1}{\partial h_i} = -\frac{\alpha}{\gamma} bk^{\frac{\alpha}{\gamma}} x_i^{\frac{\alpha\beta}{\gamma}} h_i^{-\frac{\alpha+\gamma}{\gamma}} + px_i = 0. \quad (9)$$

Из (9) следует

$$h_i^{-\frac{\alpha+\gamma}{\gamma}} = \frac{\gamma p}{\alpha b k^{\frac{\alpha}{\gamma}}} x_i^{1-\frac{\alpha\beta}{\gamma}}. \quad (10)$$

Из (10) в свою очередь следует

$$h_i = \left(\frac{\alpha b}{\gamma p} \right)^{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}} k^{\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}} x_i^{\frac{\gamma-\alpha\beta}{\alpha+\gamma}}.$$

Подставив h_i в функцию общих затрат (8) на создание сети, получим

$$F_1(x) = \sum_{i=1}^n \left(bk^{\frac{\alpha}{\gamma}} x_i^{\frac{\alpha\beta}{\gamma}} \left(\frac{\alpha b}{\gamma p} \right)^{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}} k^{\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}} x_i^{\frac{\gamma-\alpha\beta}{\alpha+\gamma}} \right)^{-\frac{\alpha}{\gamma}} + px_i \left(\frac{\alpha b}{\gamma p} \right)^{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}} k^{\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}} x_i^{\frac{\gamma-\alpha\beta}{\alpha+\gamma}} \right) l_i. \quad (11)$$

После ряда преобразований из (11) следует

$$F_1(x) = \left(\left(\frac{\gamma}{\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}} + \left(\frac{\alpha}{\gamma} \right)^{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}} \right) b^{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}} (pk)^{\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}} \sum_i x_i^{\frac{\alpha\beta+\alpha}{\alpha+\gamma}} l_i.$$

Введя обозначения

$$\eta = \left(\left(\frac{\gamma}{\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}} + \left(\frac{\alpha}{\gamma} \right)^{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}} \right) b^{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}} (pk)^{\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}}, \quad \delta = \frac{\alpha\beta+\alpha}{\alpha+\gamma},$$

окончательно получим

$$F_1(x) = \eta \sum_i x_i^\delta l_i.$$

Из таблицы 1 и полученной формулы $\delta = \frac{\alpha\beta+\alpha}{\alpha+\gamma}$ рассчитываются значения δ для гидравлических сетей из любых материалов. Например, для пластмассовых (полиэтиленовых) труб получим $\delta = 0,8045$.

6. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Ниже представлены результаты вычислительного эксперимента на ДБГ.

«Программа для проектирования потоковой сети до 6-го ранга оптимальности на основе прямой и кустовой оптимизации» (свидетельство № 2021680687) была дополнена алгоритмами формирования ДБГ и оптимизацией сетей на нем. Вычислительные эксперименты проводились на этой программе. Проектировались трубопроводные гидравлические сети из полиэтиленовых труб.

6.1. ЭКСПЕРИМЕНТ 6-ОПТИМИЗАЦИЯ НА РБГ, СФОРМИРОВАННОМ ИЗ 3 ОСТОВНЫХ ДЕРЕВЬЕВ 5-ГО РАНГА

Была проведена универсальная невозвратная 6-оптимизация. РБГ был составлен из 3 деревьев со стоимостями 485,876; 492,105; 493,054.

$$c_{ij}(x_{ij}) = \eta x_{ij}^{0,8045}$$

Таблица 2. Дерево 493,054 (потомок дерева «Расческа») / **Table 2.** Tree 493,054 (descendant of the “Rascheska” tree)

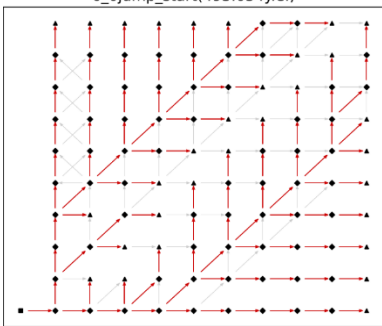
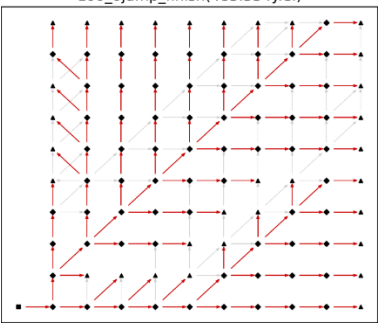
6-оптимизация	Начало	Конец
Схема сети		
Стоимость	493,054 y.e.	485,534
Время проектирования (27 час. 11 мин.)	2023,06,09 15:20	2023,06,10 08:31

Таблица 3. Дерево 492,105 (потомок дерева «Змейка») / **Table 3.** Tree 492,105 (descendant of the “Zmeika” tree)

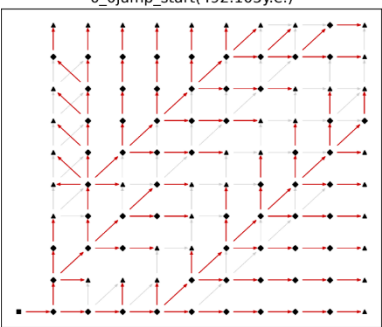
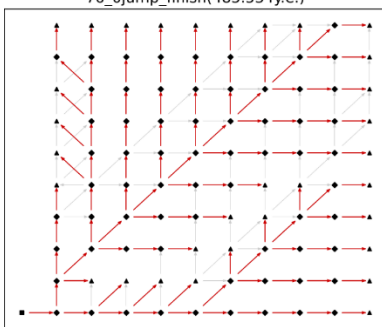
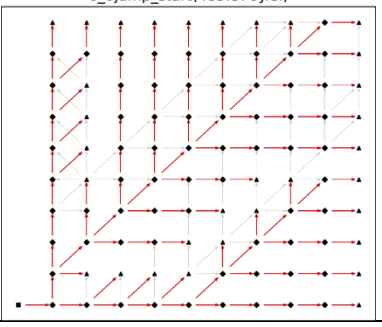
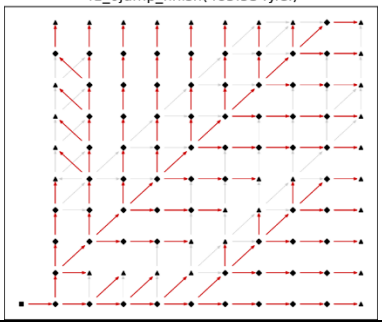
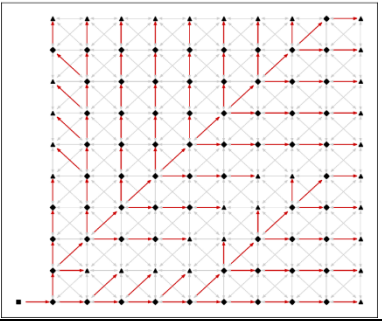
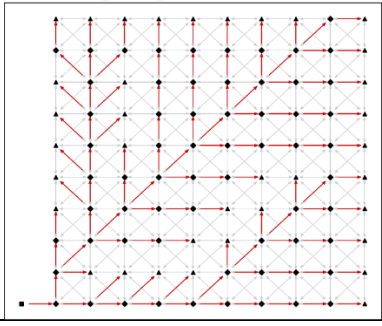
6-оптимизация	Начало	Конец
Схема сети	0_0jump_start(492.105y.e.) 	76_0jump_finish(485.534y.e.) 
Стоимость	492,105	485,534
Время проектирования (12 час. 50 мин.)	2023,06,09 15:20	2023,06,10 04:10

Таблица 4. Дерево 485,876 (потомок дерева «Диагонали») / **Table 4.** Tree 485,876 (descendant of the “Diagonali” tree)

6-оптимизация	Начало	Конец
Схема сети	0_0jump_start(485.876y.e.) 	41_0jump_finish(485.534y.e.) 
Стоимость	485,876	485,534
Время проектирования (7 час. 30 мин.)	2023,06,09 15:20	2023,06,09 22:50

Перенос решения на ПБГ и 2-оптимизация

Таблица 5. Дерево 485,534 («Расческа») / **Table 5.** Tree 485,534 (“Rascheska”)

6-оптимизация	Начало	Конец
Схема сети	0_0jump_start(485.534y.e.) 	12_0jump_finish(484.917y.e.) 
Стоимость	485,534	484,917
Время проектирования (4 мин.)	2023.06.15 15:21	2023.06.15 15:25

6.2. ЭКСПЕРИМЕНТ 7-ОПТИМИЗАЦИЯ НА РБГ, СФОРМИРОВАННЫХ ИЗ 2 ОСТОВНЫХ ДЕРЕВЬЕВ 6-ГО РАНГА

Была проведена универсальная невозвратная 7-оптимизация. РБГ был составлен из 2 деревьев со стоимостями 485,876 и 480,441.

Таблица 6. Дерево 485,876 / **Table 6.** Tree 485,876

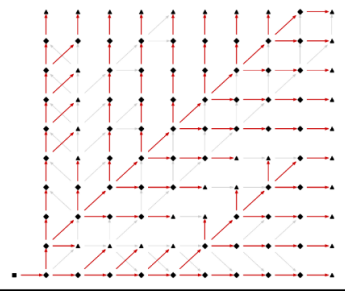
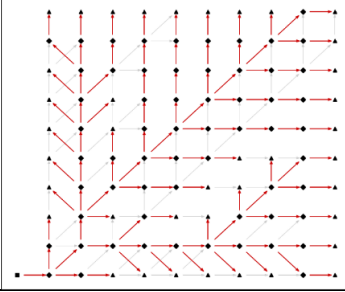
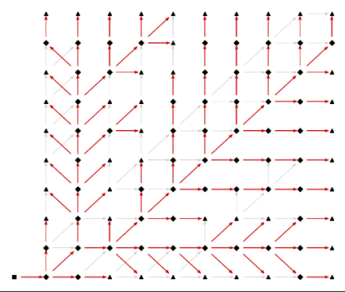
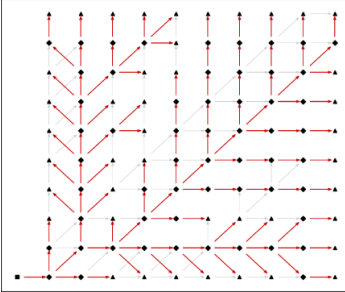
7-оптимизация	Начало	Конец
Схема сети	0_0jump_start(485.876y.e.) 	0_0jump_seeing(480.758y.e.) 
Стоимость	485,876	480,758
Время проектирования (18 час. 37 мин.)	2023,06,15 12:54	2023,06,16 07:31

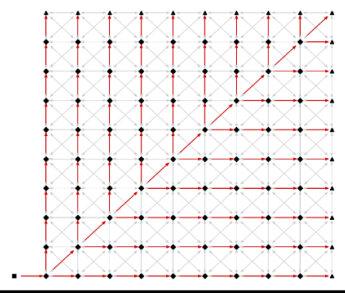
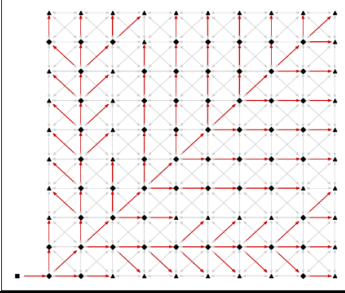
Таблица 7. Дерево 480,441 / **Table 7.** Tree 480,441

7-оптимизация	Начало	Конец
Схема сети	0_0jump_start(480.441y.e.) 	0_0jump_start(480.441y.e.) 
Стоимость	480,441	480,441
Время проектирования (13 час. 21 мин.)	2023,06,15 12:54	2023,06,16 02:15

6.3. ЭКСПЕРИМЕНТ 2-ОПТИМИЗАЦИЯ НА ПБГ

Была проведена универсальная невозвратная 2-оптимизация на ПБГ.

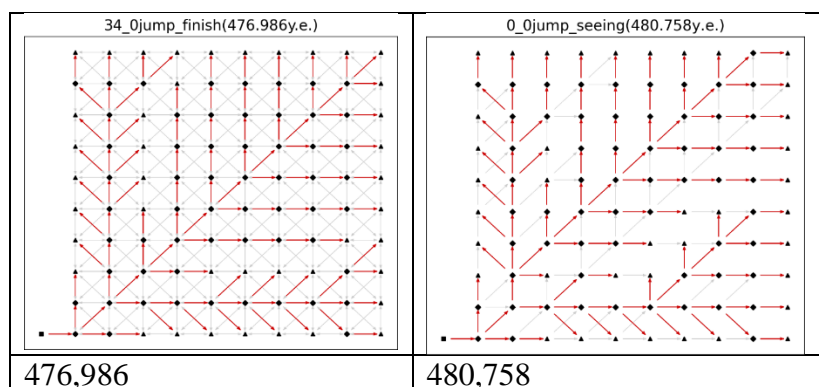
Таблица 8. Дерево 565,666 («Елка») / **Table 8.** Tree 565,666 (“Elka” tree)

2-оптимизация	Начало	Конец
Схема сети	0_0jump_start(481.418y.e.) 	34_0jump_finish(476.986y.e.) 
Стоимость	481,418	476,986
Время проектирования (3 мин.)	2023,05,29 13:50	2023,05,29 13:53

В результате компьютерного проектирования (вычислительного эксперимента) выделено 2 сети наименьшей стоимости и различной структуры. Ниже представлены их структура и стоимость в условных единицах.

Таблица 9. Сети наименьшей стоимости и различной структуры

Table 9. Networks of the lowest cost and different structure



Ниже в таблице 10 представлена основная числовая информация по оптимальной сети.

Таблица 10. Основная числовая информация по оптимальной сети

Table 10. Basic numerical information on the optimal network

Ветви сети	Длина ветвей (метр)	Потоки по ветвям (литр/с)	Стоимость ветвей (в руб.)	Ветви сети	Длина ветвей (метр)	Потоки по ветвям (литр/с)	Стоимость ветвей (в руб.)
0 - 1	100	100	196918,6	62 - 72	100	8	25813,59
1 - 2	100	2	8462,628	64 - 74	100	2	8462,628
2 - 3	100	1	4845,446	65 - 75	100	3	11726,45
9 - 10	100	1	4845,446	66 - 76	100	3	11726,45
12 - 13	100	21	56108,42	67 - 77	100	3	11726,45
13 - 14	100	19	51767,95	72 - 82	100	2	8462,628
14 - 15	100	17	47337,03	74 - 84	100	1	4845,446
15 - 16	100	14	40491,77	75 - 85	100	2	8462,628
16 - 17	100	11	33351,06	76 - 86	100	2	8462,628
17 - 18	100	8	25813,59	77 - 87	100	2	8462,628
18 - 19	100	2	8462,628	78 - 88	100	2	8462,628
19 - 20	100	1	4845,446	81 - 91	100	1	4845,446
23 - 24	100	2	8462,628	82 - 92	100	1	4845,446
24 - 25	100	1	4845,446	83 - 93	100	1	4845,446
29 - 30	100	1	4845,446	85 - 95	100	1	4845,446
34 - 35	100	5	17686,37	86 - 96	100	1	4845,446
35 - 36	100	4	14780,08	87 - 97	100	1	4845,446
36 - 37	100	3	11726,45	88 - 98	100	1	4845,446
37 - 38	100	2	8462,628	89 - 99	100	1	4845,446
38 - 39	100	1	4845,446	1 - 12	141,4214	95	267227,3
45 - 46	100	5	17686,37	12 - 23	141,4214	52	164563,3
46 - 47	100	4	14780,08	15 - 26	141,4214	1	6852,495
47 - 48	100	3	11726,45	16 - 27	141,4214	1	6852,495
48 - 49	100	2	8462,628	17 - 28	141,4214	1	6852,495
49 - 50	100	1	4845,446	18 - 29	141,4214	3	16583,7
56 - 57	100	4	14780,08	23 - 34	141,4214	47	151709,3
57 - 58	100	3	11726,45	29 - 40	141,4214	1	6852,495
58 - 59	100	2	8462,628	34 - 45	141,4214	36	122421,4
59 - 60	100	1	4845,446	42 - 53	141,4214	1	6852,495

67 - 68	100	3	11726,45	45 - 56	141,4214	25	91297,44
68 - 69	100	2	8462,628	52 - 63	141,4214	1	6852,495
69 - 70	100	1	4845,446	56 - 67	141,4214	16	63758,04
78 - 79	100	2	8462,628	62 - 73	141,4214	1	6852,495
79 - 80	100	1	4845,446	67 - 78	141,4214	9	40134,18
89 - 90	100	1	4845,446	72 - 83	141,4214	3	16583,7
1 - 11	100	2	8462,628	78 - 89	141,4214	4	20902,19
11 - 21	100	1	4845,446	83 - 94	141,4214	1	6852,495
12 - 22	100	21	56108,42	89 - 100	141,4214	1	6852,495
22 - 32	100	19	51767,95	22 - 31	141,4214	1	6852,495
23 - 33	100	2	8462,628	32 - 41	141,4214	1	6852,495
32 - 42	100	17	47337,03	42 - 51	141,4214	1	6852,495
33 - 43	100	1	4845,446	52 - 61	141,4214	1	6852,495
34 - 44	100	5	17686,37	62 - 71	141,4214	1	6852,495
42 - 52	100	14	40491,77	72 - 81	141,4214	2	11967,96
44 - 54	100	4	14780,08	13 - 4	141,4214	1	6852,495
45 - 55	100	5	17686,37	14 - 5	141,4214	1	6852,495
52 - 62	100	11	33351,06	15 - 6	141,4214	1	6852,495
54 - 64	100	3	11726,45	16 - 7	141,4214	1	6852,495
55 - 65	100	4	14780,08	17 - 8	141,4214	1	6852,495
56 - 66	100	4	14780,08	18 - 9	141,4214	2	11967,96
					Суммарная длина 11284 метра		Итоговая стоимость сети в руб. 2311211,644

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Разработан метод компьютерного проектирования трассировки потоковых сетей высокого ранга оптимальности. В отличие от существующих методов задача решается не на одном изначально заданном избыточным графе возможных соединений узлов сети друг с другом, а на динамически изменяющемся в ходе оптимизации графе. При этом с ростом ранга оптимальности сети снижается размерность графа.

2. Метод обеспечивает возможность построения сетей до 7-го ранга оптимальности, т.е. любое включение в сформированную сеть от 1 до 7 хорд базового графа и удаление соответствующих дуг сети не приведет к улучшению структуры и снижению стоимости сети. При построении такой сети дистанция по стоимости между сетью P-го и (P+1)-го ранга резко убывает, что говорит о близости решения к глобальному оптимуму.

3. Метод предназначен для проектирования больших разветвленных трубопроводных сетей регионального и межрегионального водоснабжения, трубопроводных оросительных сетей.

4. Метод обеспечивает возможность компьютерного проектирования не одной, а нескольких сетей равного ранга оптимальности, что важно для проектных организаций т.к. обеспечивает возможность выбора из них наилучшей с точки зрения проектировщиков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булатов В. П., Кассинская Л. И. Некоторые методы минимизации вогнутой функции на выпуклом многограннике // В кн. Методы оптимизации и их приложения. Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1987. С. 151–172.

2. Анциферов Е. Г., Ащепков Л. Т., Булатов В. П. Методы оптимизации и их приложения. Ч. 1. Математическое программирование. Новосибирск: Наука, 1990. 158 с. ISBN 5-02-029658-9.

3. Трубин В. А., Михалевич В. С., Шор Н. З. Оптимизационные задачи производственно-транспортного планирования. Москва: Наука, 1986. 260 с.
4. Меренков А. П., Сеннова Е. В., Сумароков С. В. и др. Математическое моделирование и оптимизация систем тепло-, водо-, нефте- и газоснабжения. Новосибирск: Наука, 1992. 407 с.
5. Туй Х. Вогнутое программирование при линейных ограничениях // Доклады АН СССР. 1964. Т. 159. № 1. С. 32–35.
6. Кудяев В. Ч., Абазоков М. Б. Ранговая оптимизация потоковых сетей // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. № 4(24). С. 178–185. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-178-185.
7. Кудяев В. Ч., Абазоков М. Б. Компьютерное проектирование потоковых сетей Р-го ранга оптимальности // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2019. № 6(92). С. 122–131. DOI:10.35330/1991-6639-2019-6-92-122-131.
8. Кудяев В. Ч., Абазоков М. Б. Кустовая оптимизация высокого ранга оптимальности потоковых сетей // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 37. № 4. С. 104–118. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-37-4-104-118.
9. Кудяев В. Ч. Ранги экстремумов и структурная оптимизация больших сетевых систем // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2016. № 4(72). С. 15–24.
10. Некрасова О. А., Хасилев В. Я. Оптимальное дерево трубопроводной системы // Экономика и мат. методы. 1970. Т. 4. № 3. С. 427–432.
11. Абрамов Н. Н., Поспелова М. М., Сомов М. А. и др. Расчет водопроводных сетей. Москва: Стройиздат, 1983. 278 с.
12. Абазоков М. Б., Багов М. А., Кудяев В. Ч. Компьютерное проектирование больших трубопроводных сетей высокого ранга оптимальности // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2022. № 4. Т. 22. С. 39–56. DOI: <https://doi.org/10.47928/1726-9946-2022-22-4-39-56>.

REFERENCES

1. Bulatov V.P., Kassinskaya L.I. Some methods for minimizing a concave function on a convex polyhedron. *Metody optimizatsii i ikh prilozheniya* [Optimization Methods and Applications]. Irkutsk: SEI SO AN USSR, 1987. Pp. 151–172. (In Russian)
2. Antsiferov E.G., Ashchepkov L.T., Bulatov V.P. *Metody optimizatsii i ikh prilozheniya. CH. 1. Matematicheskoye programmirovaniye* [Methods of optimization and their applications. Part 1. Mathematical programming]. Novosibirsk: Nauka, 1990. 158 p. ISBN 5-02-029658-9. (In Russian)
3. Trubin V.A., Mikhalevich V.S., Shor N.Z. *Optimizatsionnyye zadachi proizvodstvenno-transportnogo planirovaniya* [Optimization problems of production and transport planning]. Moscow: Nauka, 1986. 260 p. (In Russian)
4. Merenkov A.P., Sennova E.V., Sumarokov S.V. et al. *Matematicheskoye modelirovaniye i optimizatsiya sistem teplo-, vodo-, nefte- i gazosnabzheniya* [Mathematical modeling and optimization of heat, water, oil and gas supply systems]. Novosibirsk: Nauka, 1992. 407 p. (In Russian)
5. Tui H. Concave programming under linear constraints. *Doklady AN SSSR*. 1964. Vol. 159. No. 1. Pp. 32–35. (In Russian)
6. Kudaev V.Ch., Abazokov M.B. Rank optimization of streaming networks. *Vestnik KRAUNC*. Phys.-Math. Sciences. 2018. No. 4(24). Pp. 178–185. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-178-185. (In Russian)
7. Kudaev V.Ch., Abazokov M.B. Computer design of flow networks of P-th rank

of optimality. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS*. 2019. No. 6(92). Pp. 122–131. DOI:10.35330/1991-6639-2019-6-92-122-131. (In Russian)

8. Kudaev V.Ch., Abazokov M.B. Cluster optimization of high-rank optimality of flow networks. *Vestnik KRAUNC. Phys.-Math. Sciences*. 2021. Vol. 37. No. 4. Pp. 104–118. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-37-4-104-118. (In Russian)

9. Kudaev V.Ch. Ranks of extremums and structural optimization of large network systems. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS*. 2016. No. 4(72). Pp. 15–24. (In Russian)

10. Nekrasova O.A., Khasilev V.Ya. Optimal tree of a pipeline system. *Ekonomika i matematicheskiye metody* [Economics and Mathematical Methods]. 1970. Vol. 4. No. 3. Pp. 427–432. (In Russian)

11. Abramov N.N., Pospelova M.M., Somov M.A. et al. *Raschet vodoprovodnykh setey* [Calculation of water supply networks]. Moscow: Stroyizdat, 1983. 278 p. (In Russian)

12. Abazokov M.B., Bagov M.A., Kudaev V.Ch. Computer design of large pipeline networks of high optimality rank. *Doklady AMAN*. 2022. No. 4. Vol. 22. Pp. 39–56. DOI: <https://doi.org/10.47928/1726-9946-2022-22-4-39-56>. (In Russian)

Информация об авторах

Абазокв Мухаммед Борисович, мл. науч. сотр., Институт прикладной математики и автоматизации – филиал Кабардино-Балкарского научного центра РАН;

360000, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А;

Abazokov.Mukhammed@yandex.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6847-403X>

Кудаев Валерий Черимович, канд. ф.-м. наук, вед. науч. сотр., Институт прикладной математики и автоматизации – филиал Кабардино-Балкарского научного центра РАН;

360000, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А;

vchkudaev@mail.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8313-4199>

Information about the authors

Abazokov Mukhammed Borisovich, junior researcher, Institute of Applied Mathematics and Automation – branch of Kabardino-Balkarian Scientific Center of the RAS;

360000, Russia, Nalchik, 89 A Shortanov street;

Abazokov.Mukhammed@yandex.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6847-403X>

Kudaev Valery Cherimovich, Ph.D., leading researcher, Institute of Applied Mathematics and Automation – branch of Kabardino-Balkarian Scientific Center of the RAS;

360000, Russia, Nalchik, 89 A Shortanov street;

vchkudaev@mail.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8313-4199>