МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

УДК 517.58 Научная статья
DOI: 10.35330/1991-6639-2022-6-110-19-27

Об интегральном представлении Меллина–Барнса одной специальной функции

Ф. Г. Хуштова

Институт прикладной математики и автоматизации –
филиал Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук
360000, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А

Аннотация. В работе рассматривается интегральное представление Меллина–Барнса одной специальной функции, возникающей в теории краевых задач для параболических уравнений с оператором Бесселя и дробной производной по времени. Исследуется сходимость такого интеграла. Получены разложение рассматриваемой функции в степенные ряды и асимптотические формулы при большом и малом значениях аргумента. Показано, что при некоторых параметрах рассматриваемая функция переходит в известные функции.

Ключевые слова: интеграл Меллина–Барнса, гипергеометрическая функция, гамма-функция

Поступила 01.12.2022, одобрена после рецензирования 12.12.2022, принята к публикации 15.12.2022

Для цитирования. Хуштова Ф. Г. Об интегральном представлении Меллина–Барнса одной специальной функции // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2022. № 6(110). С. 19–27. DOI: 10.35330/1991-6639-2022-6-110-19-27

MSC 33C60, 33E50 Original article

On the Mellin–Barnes integral representation of one special function

F.G. Khushtova

Institute of Applied Mathematics and Automation –
branch of Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences
360000, Russia, Nalchik, 89 A Shortanov street

Abstract. The paper considers the Mellin–Barnes integral representation of a special function that arises in the theory of boundary value problems for parabolic equations with a Bessel operator and a fractional time derivative. The convergence of such an integral is investigated. The expansion of the considered function into power series and asymptotic formulas for large and small values of the argument is given. For particular values of the parameters of the function under consideration, some well-known elementary and special functions are obtained.

Keywords: Mellin–Barnes integral, hypergeometric function, gamma function.

Submitted 01.12.2022, approved after reviewing 12.12.2022, accepted for publication 15.12.2022

For citation. Khushtova F.G. On the Mellin–Barnes integral representation of one special function. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS.* 2022. No. 6(110). Pp. 19–27. DOI: 10.35330/1991-6639-2022-6-110-19-27

Введение

Решения многих задач математической физики, техники и экономики выражаются через так называемые специальные функции. В теории специальных функций важное место занимают функции гипергеометрического типа. Они могут быть записаны как линейные комбинации интегралов Меллина–Барнса [1, с. 63; 2, с. 7]

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \prod_{i,j,k,l} \frac{\Gamma(a_i + \alpha_i s)\Gamma(b_j - \beta_j s)}{\Gamma(c_k + \gamma_k s)\Gamma(d_l - \delta_l s)}\, z^{-s}\, ds, \tag{1}$$

где L – некоторый бесконечный контур; $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k, \delta_l$ – действительные положительные числа, a_i, b_j, c_k, d_l – комплексные параметры, z – комплексная переменная.

Интегралы вида (1) впервые были введены итальянским математиком Сальваторе Пинчерле в 1888 году (Salvatore Pincherle, 1853–1936) [12]. Их теорию развили английский математик Эрнест Уильям Барнс (Ernest William Barnes, 1874–1953) и финский математик Ялмар Меллин (Hjalmar Mellin, 1854–1933) [6, 7, 15, 16].

В случае, если $\alpha_i = \beta_j = \gamma_k = \delta_l = 1$, контур L удовлетворяет некоторым условиям и интеграл (1) сходится, то функция $I(z)$ сводится к G-функции Мейера [1, с. 203; 10; 11; 13]. Обобщением функции Мейера является H-функции Фокса [8]:

$$H_{p,q}^{m,n}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(s) z^{-s}\, ds,$$

где

$$\mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(s) = \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(b_j + \beta_j s) \prod_{j=1}^{n} \Gamma(1 - a_i - \alpha_i s)}{\prod_{j=n+1}^{p} \Gamma(a_i + \alpha_i s) \prod_{j=m+1}^{q} \Gamma(1 - b_j - \beta_j s)},$$

$0 \le m \le q$, $0 \le n \le p$, α_i, β_j – действительные положительные числа, a_i, b_j – комплексные параметры, $i = 1,2,\dots,p$, $j = 1,2,\dots,q$, и бесконечный контур L выбирается таким образом, чтобы интеграл сходился. Исследованиям свойств этой функции посвящено достаточно много работ, среди которых можно выделить [8; 9; 13; 14; 16]. Однако, как отмечено в работе [2, с. 8], слишком общие результаты остаются абстрактными, и некоторые свойства и функциональные соотношения, справедливые при частных значениях параметров функции Фокса, могут оставаться «невидимыми» в общем случае.

В данной работе рассмотрим частный случай такой функции Фокса, содержащей четыре параметра. Эта функция возникает при решении краевых задач для дифференциального уравнения с оператором Бесселя, действующим по пространственной переменной, и производной дробного порядка по временной переменной [4; 5]:

$$B_x u(x,y) - D_{0y}^{\alpha} u(x,y) = 0,$$

где

$$B_x u = x^{-b} \frac{\partial}{\partial x}\left(x^b \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

– оператор Бесселя, $|b| < 1$, D_{0y}^{α} – оператор дробного дифференцирования в смысле Римана–Лиувилля порядка α, который определяется следующим образом [3, с. 9]: $D_{0y}^{\alpha} u = u_y$, если $\alpha = 1$, и

$$D_{0y}^{\alpha}u(x,y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial y}\int_0^y \frac{u(x,t)\,dt}{(y-t)^{\alpha}}, \quad \text{если} \quad 0<\alpha<1.$$

Для рассматриваемой функции исследуется вопрос сходимости интеграла Меллина-Барнса. Получены представления в виде степенных рядов и асимптотические разложения при большом и малом значениях аргумента. При частных значениях параметров рассматриваемая функция переходит в некоторые известные элементарные и специальные функции.

1. Вспомогательные сведения

Далее в работе

$$\Gamma(s) = \int\limits_0^{\infty} e^{-t}t^{s-1}\,dt, \ \ \mathrm{Re}s > 0$$

– гамма-функция Эйлера [1, с. 5; 2, с. 15].

Как известно, $\Gamma(s)$ аналитична в комплексной плоскости s всюду, кроме точек $s=-n, \ n=0,1,2,\ldots$, в которых имеет полюсы первого порядка с вычетами $(-1)^n/n!$. Соответственно, $\Gamma(-s)$ в точках $s=n, \ n=0,1,2,\ldots$ имеет полюсы первого порядка с вычетами $(-1)^{n+1}/n!$.

Для гамма-функции справедливы формула дополнения

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s} \tag{2}$$

и формула удвоения Лежандра

$$\Gamma(2s) = \frac{2^{2s-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right). \tag{3}$$

При $|s|\to\infty$ гамма-функция асимптотически разлагается по формуле Стирлинга [2, с. 40]:

$$\Gamma(s) = \sqrt{2\pi}s^{s-1/2}e^{-s}\left[1+\frac{1}{12s}+O(s^{-2})\right], \qquad |\arg s|<\pi. \tag{4}$$

При $|s|\to\infty$ и $|y|\to\infty$ справедливо равенство

$$|\Gamma(x+iy)| = \sqrt{2\pi}|y|^{x-1/2}e^{-\pi|y|/2}[1+O(1/y)], \qquad |y|\to\infty, \tag{5}$$

где x, y – вещественные величины.

2. Основные результаты

Пусть $\rho>0, \ \mu,\sigma$ и $\nu\in\mathbb{C}$. Рассмотрим функцию комплексного переменного z, представленную интегралом:

$$J_{\nu}^{\rho,\mu,\sigma}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \theta(s)\left(\frac{z}{2}\right)^{-2s}\,ds, \tag{6}$$

где

$$\theta(s) = \frac{\Gamma(\nu/2+s)\Gamma(1-\sigma/2+s)\Gamma(\sigma/2-s)}{\Gamma(\mu-\rho\sigma/2+\rho s)\Gamma(1+\nu/2-s)},$$

L – некоторая кривая, простирающаяся в бесконечность.

Подынтегральная функция $\theta(s)(z/2)^{-2s}$ аналитична в плоскости s всюду, кроме, быть может, двух серий точек – *левой серии*: $s=-\nu/2-k, k=0,1,2,\ldots, s=\sigma/2-1-n, n=$

$0, 1, 2, \ldots$ и *правой серии:* $s = \sigma/2 + l, l = 0, 1, 2, \ldots$ В этих точках подынтегральная функция, вообще говоря, имеет полюсы. Будем считать, что указанные серии точек являются простыми полюсами, то есть $(\nu + \sigma)/2 \notin \mathbb{Z}$.

Контур интегрирования L определим следующим образом:

1) $L = L_{-\infty}$ – левая петля, которая расположена в некоторой горизонтальной полосе, начинается в точке $-\infty + i\varphi_1$, оставляет все полюса левой серии слева, а правой серии – справа от контура и оканчивается в точке $-\infty + i\varphi_2$, где $\varphi_1 < \varphi_2$.

2) $L = L_{+\infty}$ – правая петля, которая начинается в точке $+\infty + i\varphi_1$ и оканчивается в точке $+\infty + i\varphi_2$, где $\varphi_1 < \varphi_2$, разделяя вышеуказанные полюса так же, как и $L_{-\infty}$.

3) $L_{i\infty} = (\gamma - i\infty, \gamma + i\infty), \gamma_1 < \gamma < \gamma_2, \gamma_1 = -\min\{\mathrm{Re}\,\nu/2, 1 - \mathrm{Re}\,\sigma/2\}, \gamma_2 = \mathrm{Re}\,\sigma/2$.

Для функции (6) справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. *Интеграл (6) сходится, если выполнено одно из следующих условий:*

1) $L = L_{-\infty}, \rho < 2, 0 < |z| < \infty$ или $\rho = 2, 0 < |z| < 1$, или $\rho = 2, |z| = 1, \mathrm{Re}\,(\sigma - \mu) + 1/2 < 0$;

2) $L = L_{+\infty}, \rho > 2, 0 < |z| < \infty$ или $\rho = 2, |z| > 1$, или $\rho = 2, |z| = 1, \mathrm{Re}\,(\sigma - \mu) + 1/2 < 0$;

3) $L = L_{i\infty}, \rho < 2, 0 \le |\arg z| < \pi(1 - \rho/2)/2$ или $\rho = 2, z > 0, \mathrm{Re}\,(\sigma - \mu) + 1/2 < 0$.

Доказательство. Для исследования сходимости интеграла по контуру $L = L_{-\infty}$ оценим подынтегральную функцию $\theta(s)(z/2)^{-2s}$ при $s \to \infty$, считая, что $|\arg(-s)| < \pi$, то есть разрез проведен по положительной полуоси $\mathrm{Im}\,s = 0$. Домножим и разделим эту функцию на $\Gamma(1 - \nu/2 - s)\Gamma(1 - \mu + \rho\sigma/2 - \rho s)$ и применим формулу дополнения (2). Получим

$$\theta(s)\left(\frac{z}{2}\right)^{-2s} = \frac{\Gamma(1 - \mu + \rho\sigma/2 - \rho s)}{\Gamma(1 + \nu/2 - s)\Gamma(1 - \nu/2 - s)} \times$$

$$\times \frac{\pi \sin(\mu - \rho\sigma/2 + \rho s)\pi}{\sin(\nu/2 + s)\pi \cdot \sin(-\sigma/2 + s)\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{-2s}.$$

Учитывая равенства

$$\left|\left(\frac{z}{2}\right)^{-2s}\right| = |\exp\{-2s\ln(z/2)\}| = |\exp\{-2(\mathrm{Re}\,s + i\,\mathrm{Im}\,s)(\ln|z/2| + i\arg z)\}| =$$

$$= \exp\{-2\,\mathrm{Re}s\ln|z/2| + 2\,\mathrm{Im}s\arg z\}, \tag{7}$$

$$\Gamma(b - Bs) = O(\Gamma(-Bs)(-Bs)^b) =$$

$$= O\left(\exp\left\{(B - B\ln B)\mathrm{Re}s - \left(B\,\mathrm{Re}s + \frac{1}{2} - \mathrm{Re}\,b\right)\ln|s| + B\,\mathrm{Im}s\arg(-s)\right\}\right),$$

$$\sin(a + As)\pi = O(\exp\{\pi A|\mathrm{Im}s|\}),$$

которые выводятся из формул (4) и (2.9) [2, с. 17], получим следующую оценку подынтегральной функции при $\mathrm{Re}s \to -\infty$:

$$\left|\theta(s)\left(\frac{z}{2}\right)^{-2s}\right| = O(\exp\{-2\,\mathrm{Re}s\ln|z/2| + 2\,\mathrm{Im}s\arg z +$$

$$+(\rho - 2 - \rho\ln\rho)\mathrm{Re}s + \pi(\rho - 2)|\mathrm{Im}s| -$$

$$-[(\rho - 2)\,\mathrm{Re}s + 1/2 - \rho\mathrm{Re}\,\sigma/2 + \mathrm{Re}\mu]\ln|s| + (\rho - 2)\,\mathrm{Im}s\arg(-s)\}). \tag{8}$$

Главная часть выражения справа, то есть функция

$$\exp\{-(\rho-2)\mathrm{Re}s\ \ln|s|\}$$

стремится к нулю при $\mathrm{Re}s \to -\infty$, если $\rho < 2$, а $z \neq 0$. В случае, когда $\rho = 2$, главной частью является уже

$$\exp\{-2\ \mathrm{Re}s\ \ln|z|\}.$$

Она исчезает при $\mathrm{Re}s \to -\infty$, если $\ln|z| < 0$, то есть $|z| < 1$. В обоих случаях интеграл по левой петле $L_{-\infty}$ абсолютно сходится, если считать, что $|\mathrm{Im}s|$ ограничена при $s \in L_{-\infty}$.

Если $\rho = 2$ и $|z| = 1$, то главной частью (8) является выражение степенного порядка $|s|^{\mathrm{Re}(\sigma-\mu)-1/2}$. Интеграл (6) сходится, если

$$\mathrm{Re}(\sigma-\mu) + 1/2 < 0. \tag{9}$$

Если $\rho > 2$, то подынтегральная функция экспоненциально растет, и интеграл (6) по левой петле расходится.

По правой петле $L = L_{+\infty}$ при $\mathrm{Re}s \to +\infty$ интеграл (6) будет сходиться, если $\rho > 2$, $z \neq 0$, либо $\rho = 2$, $|z| > 1$. Если $\rho = 2$ и $|z| = 1$, то необходимо выполнение условия (9).

Рассмотрим случай, когда $|\mathrm{Im}s|$ не ограничена при $s \in L_{-\infty}$, то есть когда левая петля может быть развернута в контур $L_{i\infty}$. Так как контур $L_{-\infty}$ произвольный, то можно считать, что $\mathrm{Im}s$ и $\mathrm{Re}s$ стремятся к бесконечности независимо друг от друга при $|s| \to \infty$, $s \in L_{-\infty}$.

Для нахождения порядка подынтегральной функции при $|\mathrm{Im}s| \to \infty$ воспользуемся следствием из формулы Стирлинга (5), из которого следуют оценки

$$\Gamma(a+As) = O(\exp\{(\mathrm{Re}a + A\mathrm{Re}s - 1/2)\ln|\mathrm{Im}s| - \pi A|\mathrm{Im}s|/2\}),$$

$$\Gamma(b-Bs) = O(\exp\{(\mathrm{Re}b - B\mathrm{Re}s - 1/2)\ln|\mathrm{Im}s| - \pi B|\mathrm{Im}s|/2\}).$$

Применив эти оценки и оценку (7), при $|\mathrm{Im}s| \to \infty$ получим равенство

$$\left|\theta(s)\left(\frac{z}{2}\right)^{-2s}\right| = O(\exp\{-2\mathrm{Re}s\ \ln|z/2| + 2\ \mathrm{Im}s \arg z +$$

$$+[(2-\rho)\mathrm{Re}s + \rho\mathrm{Re}\sigma/2 - \mathrm{Re}\,\mu - 1/2]\ln|\mathrm{Im}s| - \pi(1-\rho/2)\,|\mathrm{Im}s|\}).$$

Главный член правой части

$$\exp\{-\pi(1-\rho/2)\,|\mathrm{Im}s| + 2\ \mathrm{Im}s \arg z\}$$

экспоненциально исчезает при $|\mathrm{Im}s| \to \infty$, если $\rho < 2$ и

$$0 \leq |\arg z| < \pi(1-\rho/2)/2. \tag{10}$$

При таких z интеграл (6) по контуру $L_{i\infty}$ сходится и определяет функцию, аналитическую в секторе (10).

Если $\rho = 2$, то следует брать действительное положительное z, то есть $\arg z = 0$. Главным членом в этом случае является выражение степенного порядка

$$|\mathrm{Im}s|^{\mathrm{Re}(\sigma-\mu)-1/2}.$$

При $\mathrm{Re}(\sigma-\mu) + 1/2 < 0$ этот интеграл сходится абсолютно при всех $z = x \in (0,\infty)$.

3. Представление в виде степенных рядов

Используя вычеты гамма-функции в особых точках из интегрального представления (6), по теореме о вычетах [2, с. 21] нетрудно получить разложения функции (6) в виде степенных рядов. А именно, справедливы следующие теоремы.

Теорема 3.1. *Пусть* $0 < \rho < 2,\ 0 < |z| < \infty$ *или* $\rho = 2,\ 0 < |z| < 1,$ *или* $\rho = 2,\ |z| = 1,$ $\mathrm{Re}(\sigma - \mu) + 1/2 < 0$. *Тогда имеет место разложение в степенной ряд*

$$J_\nu^{\rho,\mu,\sigma}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left(\frac{z}{2}\right)^{2-\sigma+2k}, \tag{11}$$

где

$$a_k = \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(1-(\nu+\sigma)/2-k)\Gamma\big((\nu+\sigma)/2+k\big)}{\Gamma(\mu-\rho(\nu+\sigma)/2-\rho k)\Gamma(1+\nu+k)}, \tag{12}$$

$$b_k = \frac{(-1)^k\Gamma\big((\nu+\sigma)/2-1-k\big)}{\Gamma(\mu-\rho-\rho k)\Gamma(2+(\nu-\sigma)/2+k)}. \tag{13}$$

Теорема 3.2. *Пусть* $\rho > 2,\ 0 < |z| < \infty$ *или* $\rho = 2,\ |z| > 1,$ *или* $\rho = 2,\ |z| = 1,$ $Re(\sigma - \mu) + 1/2 < 0$. *Тогда имеет место разложение*

$$J_\nu^{\rho,\mu,\sigma}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(\frac{z}{2}\right)^{-\sigma-2k}, \tag{14}$$

где

$$c_k = \frac{(-1)^k\Gamma\big((\nu+\sigma)/2+k\big)\Gamma(1-(\nu+\sigma)/2-2k)}{\Gamma(\mu+\rho k)\Gamma(1+(\nu-\sigma)/2-k)}. \tag{15}$$

Разложения (11) и (14) имеют место и в случае, когда $\rho < 2,\ 0 \le |\arg z| < \pi(1-\rho/2)/2$, или $\rho = 2,\ z > 0,\ \mathrm{Re}(\sigma - \mu) + 1/2 < 0$.

4. Асимптотика

Из (11) и (14) следуют асимптотические разложения

$$J_\nu^{\rho,\mu,\sigma}(z) = a_0\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} + b_0\left(\frac{z}{2}\right)^{2-\sigma} + o\big(z^\delta\big),\ \ |z| \to 0, \tag{16}$$

где a_0 и b_0 определяются из (12) и (13), $\delta = \min\{Re\,\nu, 2 - Re\,\sigma\}$,

$$J_\nu^{\rho,\mu,\sigma}(z) = c_0\left(\frac{z}{2}\right)^{-\sigma} + o(z^{-\sigma}), \qquad |z| \to \infty. \tag{17}$$

Разложение (16) справедливо при $0 < \rho \le 2$, а (17) – при $\rho > 0$.

5. Некоторые частные случаи

При различных значениях параметров ρ, μ, σ и ν нетрудно получить некоторые известные элементарные и специальные функции. Например, при $\rho = \mu = 1,\ \sigma = 2 + \nu$ из (6) получим

$$J_\nu^{1,1,2+\nu}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \Gamma(\nu/2+s)\left(\frac{z}{2}\right)^{-2s} ds,$$

где $L=(\omega-i\infty,\omega+i\infty)$, $\omega>-\mathrm{Re}\nu/2$. Сделав замену переменной интегрирования $s=t-\nu/2$, находим

$$J_{\nu}^{1,1,2+\nu}(z)=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\int_{L_1}\Gamma(t)\left(\frac{z}{2}\right)^{-2t}dt,$$

где $L_1=(\omega-i\infty,\omega+i\infty)$, $\omega>0$. Сравнивая последнее представление с 3.1(1) [2, с. 136], приходим к равенству

$$J_{\nu}^{1,1,2+\nu}(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\exp\left(-\frac{z^2}{4}\right).$$

При $\rho=\mu=1$, $\sigma=\nu$ из (6) получим

$$J_{\nu}^{1,1,\nu}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\Gamma(\nu/2+s)\Gamma(\nu/2-s)}{\Gamma(1+\nu/2-s)}\left(\frac{z}{2}\right)^{-2s}ds,$$

где $L=(\omega-i\infty,\omega+i\infty)$, $-\mathrm{Re}\,\nu/2<\omega<\mathrm{Re}\,\nu/2$. Сделав замену $s=t+\nu/2$, находим

$$J_{\nu}^{1,1,\nu}(z)=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}\int_{L_2}\frac{\Gamma(\nu+t)\Gamma(-t)}{\Gamma(1-t)}\left(\frac{z}{2}\right)^{-2t}dt,$$

где $L_2=(\omega-i\infty,\omega+i\infty)$, $-\mathrm{Re}\,\nu<\omega<0$. Сравнивая полученный интеграл с 8.27(3) [2, с. 168], приходим к представлению

$$J_{\nu}^{1,1,\nu}(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}\gamma\left(\nu;\frac{z^2}{4}\right),$$

где $\gamma(\nu;z)$ – неполная гамма-функция [2, с. 294].

При $\sigma=3/2$, $\nu=-1/2$ из (6) с помощью формулы (3) можем записать

$$J_{-1/2}^{2\rho,\mu,3/2}(z)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}i}\int_{L}\frac{\Gamma(-1/2+2s)}{\Gamma(\mu-3\rho/2+2\rho s)}z^{-2s}ds,$$

где $L=(\omega-i\infty,\omega+i\infty)$, $\omega>1/4$. Сделав замену $2s=t+1/2$, имеем

$$J_{-1/2}^{2\rho,\mu,3/2}(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi z}\,i}\int_{L_3}\frac{\Gamma(t)}{\Gamma(\mu-\rho+\rho t)}z^{-t}dt,$$

где $L_3=(\omega-i\infty,\omega+i\infty)$, $\omega>0$. Сравнивая полученное представление с (1.124) и (1.140) [14, с. 23, 25], находим

$$\sqrt{z}J_{-1/2}^{2\rho,\mu,3/2}(z)=\sqrt{2\pi}\,\phi(-\rho,\mu-\rho;-z),$$

где $\phi(\alpha,\beta;z)$ – функция Райта [17].

Заключение

В работе доказана сходимость интеграла Меллина-Барнса для одного частного случая функции Фокса. Получены представления рассматриваемой функции в виде степенных рядов, её асимптотическое поведение при большом и малом значениях аргумента. Показано, что в терминах исследуемой функции могут быть записаны некоторые известные функции, в частности, экспоненциальная функция со степенным множителем, неполная гамма-функция, функция Райта. Полученные результаты будут полезны при исследовании свойств решений вырождающихся параболических уравнений с производными дробного порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. I. Москва: Наука, 1965. 296 с.
2. *Маричев О. И.* Метод вычисления интегралов от специальных функций (теория и таблицы формул). Минск: Наука и техника, 1978. 312 с.
3. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. Москва: Физматилит, 2003. 272 с.
4. *Хуштова Ф. Г.* Первая краевая задача в полуполосе для уравнения параболического типа с оператором Бесселя и производной Римана–Лиувилля // Математические заметки. 2016. Т. 99. Вып. 6. С. 921–928.
5. *Хуштова Ф. Г.* Вторая краевая задача в полуполосе для уравнения параболического типа с оператором Бесселя и частной производной Римана–Лиувилля // Математические заметки. 2018. Т. 103. № 3. С. 460–470.
6. *Barnes E. W.* A new development of the theory of the hypergeometric functions // Proc. London Math. Soc. 1908. V. s2-6. Pp. 141–177.
7. *Barnes E. W.* A transformation of generalised hypergeometric series // Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics. 1910. Vol. 41. Pp. 136–140.
8. *Fox C.* The G and H Functions as Symmetrical Fourier kernels // Trans. Amer. Math. Soc., 1961. Vol. 98. No. 3. Pp. 395–429.
9. *Kilbas A. A., Saigo M.* H-Transforms: Theory and Applications. CRC Press. 2004. 389 p.
10. *Luke Y. L.* The special functions and their approximations. Vol. I. New York – London: Acad. Press. 1969. 349 p.
11. *Luke Y. L.* The special functions and their approximations. Vol. II. New York – London: Acad. Press. 1969. 485 p.
12. *Mainardi F., Pagnini G.* Salvatore Pincherle: the pioneer of the Mellin-Barnes integrals // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2003. Vol. 153. Pp. 331–342.
13. *Mathai A. M., Saxena R. K.* Generalized Hypergeometric Functions with Applications in Statistics and Physical Sciences // Lect. Notes Math. 1973. 348 p.
14. *Mathai A. M., Saxena R. K., Haubold H. J.* The H-Function: Theory and Applications. New York: Springer. 2010. 268 p.
15. *Mellin H.* Abriss einer einheitlichen Theorie der Gamma und der Hypergeometrischen Funktionen // Mathematische Annalen. 1910. Vol. 68. Pp. 305–337.
16. *Paris R. B., Kaminski D.* Asymptotics and Mellin-Barnes Integrals. New York: Cambridge University Press. 2001. 422 p.
17. *Wright E. M.* The generalized Bessel function of order greater than one // The Quarterly Journal of Mathematics. 1940. Vol. os-11. No. 1. Pp. 36–48.

Информация об авторе

Хуштова Фатима Гидовна, канд. физ.-мат. наук, науч. сотр. отдела дробного исчисления, Институт прикладной математики и автоматизации – филиал Кабардино-Балкарского научного центра РАН;

360000, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А;

khushtova@yandex.ru, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4088-3621

REFERENCES

1. Bateman H., Erdeyi A. Higher transcendental functions. Vol. 1. Moscow: Nauka, 1965. 296 p. (In Russian)
2. Marichev O.I. Method for calculating integrals of special functions (theory and tables of formulas). Minsk: Nauka i tekhnika, 1978. 312 p. (In Russian)
3. Nahushev A.M. *Drobnoe ischislenie i ego primenenie* [Fractional calculus and its application]. Moscow: Fizmatilit, 2003. 272 p. (In Russian)
4. Khushtova F.G. First Boundary-Value Problem in the Half-Strip for a Parabolic-Type Equation with Bessel Operator and Riemann–Liouville Derivative. *Mathematical Notes*. 2016. Vol. 99. No. 6. Pp. 916–923. (In Russian)
5. Khushtova F.G. The Second Boundary-Value Problem in a Half-Strip for a Parabolic-Type Equation with Bessel Operator and Riemann–Liouville Partial Derivative. *Mathematical Notes.* 2018. Vol. 103. No. 3. Pp. 474–482. (In Russian)
6. Barnes E.W. A new development of the theory of the hypergeometric functions. Proc. London Math. Soc. 1908. Vol. s2–6. Pp. 141–177.
7. Barnes E.W. A transformation of generalised hypergeometric series. *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*. 1910. Vol. 41. Pp. 136–140.
8. Fox C. The G and H Functions as Symmetrical Fourier kernels. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1961. Vol. 98. No. 3. Pp. 395–429.
9. Kilbas A.A., Saigo M. H-Transforms: Theory and Applications. CRC Press, 2004. 389 p.
10. Luke Y.L. The special functions and their approximations. Vol. I. New York – London: Acad. Press, 1969. 349 p.
11. Luke Y.L. The special functions and their approximations. Vol. II. New York – London: Acad. Press, 1969. 485 p.
12. Mainardi F., Pagnini G. Salvatore Pincherle: the pioneer of the Mellin-Barnes integrals. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2003. Vol. 153. Pp. 331–342.
13. Mathai A.M., Saxena R.K. Generalized Hypergeometric Functions with Applications in Statistics and Physical Sciences. *Lect. Notes Math*, 1973. 348 p.
14. Mathai A.M., Saxena R.K., Haubold H.J. The H-Function: Theory and Applications. New York: Springer, 2010. 268 p.
15. Mellin H. Abriss einer einheitlichen Theorie der Gamma und der Hypergeometrischen Funktionen. *Mathematische Annalen*. 1910. Vol. 68. Pp. 305–337.
16. Paris R.B., Kaminski D. Asymptotics and Mellin-Barnes Integrals. New York: Cambridge University Press, 2001. 422 p.
17. Wright E.M. The generalized Bessel function of order greater than one. The Quarterly Journal of Mathematics. 1940. Vol. os-11. No. 1. Pp. 36–48.

Information about the author

Khushtova Fatima Gidovna, Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Researcher of the Department of Fractional calculus, Institute of Applied Mathematics and Automation of Kabardino-Balkarian Scientific Centre of RAS;

360000, Russia, Nalchik, 89 A Shortanov street;

khushtova@yandex.ru, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4088-3621