

## О движениях с переменным ускорением

К. Н. Анахаев

Институт прикладной математики и автоматизации –  
филиал Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук  
360000, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А

**Аннотация.** Перемещения как природных тел, так и искусственных объектов, в подавляющем большинстве случаев происходят в виде движений с переменным ускорением вследствие условий их возникновения и развития, сопротивления среды, технологических процессов и т.д. Примерами таких форсированных движений с переменными ускорениями могут служить оползание (обвал) геофизических грунтовых массивов, стартовый разгон космического корабля, свободное падение тел в сопротивляющейся среде, импульсный разгон или торможение искусственных тел и др. Для учета переменного ускорения в уравнениях движения предложено ввести новый параметр – «форсаж –  $F$ , м/сек<sup>3</sup>» как производную от ускорения (или вторую производную от скорости, третью – от пути). Дана классификация форм движений в зависимости от относительных значений форсированного ускорения. Использование указанного параметра открывает широкие возможности при определении текущих кинематических и динамических характеристик тел в заданные моменты времени при различных формах форсированного движения с переменными ускорениями.

**Ключевые слова:** скорость движения, переменное ускорение, свободное падение, третья производная, сопротивляющаяся среда

Поступила 18.10.2022, одобрена после рецензирования 28.10.2022, принята к публикации 08.11.2022

**Для цитирования.** Анахаев К. Н. О движениях с переменным ускорением // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2022. № 6 (110). С. 13–18. DOI: 10.35330/1991-6639-2022-6-110-13-18

MSC 33, 45

Original article

## About variable acceleration movements

K.N. Anakhaev

Institute of Applied Mathematics and Automation –  
branch of Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences  
360000, Russia, Nalchik, 89 A Shortanov street

**Abstract.** Movements of both natural bodies and artificial objects, in the vast majority of cases, occur in the form of movements with variable acceleration due to the conditions of their occurrence and development, environmental resistance, technological processes, etc. Examples of such forced movements with variable accelerations are landslide (collapse) of geophysical soil masses, launch acceleration of a spacecraft, free fall of bodies in a resisting environment, pulse acceleration or braking of artificial bodies, etc. To take into account variable acceleration in the equations of motion, it is proposed to introduce a new parameter – "afterburner –  $F$ , m/sec<sup>3</sup>," as a derivative of acceleration (or a second derivative of speed, the third – of path). The classification of forms of motion depending on the relative values of forced acceleration is presented. The use of the specified parameter opens up wide possibilities when determining the current kinematic and dynamic characteristics of bodies at given moments of time at various forms of forced motion with variable accelerations.

**Keywords:** speed of movement, variable acceleration, free fall, third derivative, resisting medium

Submitted 18.10.2022,

approved after reviewing 28.10.2022,

accepted for publication 08.11.2022

**For citation.** Anakhaev K.N. About variable acceleration movements. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS.* 2022. No. 6 (110). Pp. 13–18. DOI: 10.35330/1991-6639-2022-6-110-13-18

## ВВЕДЕНИЕ

Как известно [1, 2], во многих областях науки при изучении различных природных явлений и инженерных механических систем рассматриваются различные виды перемещений (движений) тел: равномерное с нулевым ускорением ( $a = 0$ ), равноускоренное ( $a > 0$ ) и равнозамедленное ( $a < 0$ ) движения, в которых значение ускорения, как правило, принимается за постоянную величину ( $a = const$ ).

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Между тем в действительности в подавляющем большинстве случаев перемещения как природных тел, так и искусственных объектов, происходят в виде движений (прямолинейных, вращательных и др.) с переменными ускорениями вследствие условий их возникновения и развития, сопротивления среды, технологических процессов и т.д. Примерами таких форсированных движений могут служить оползание (обвал) геофизических грунтовых массивов, свободное падение тел в сопротивляющейся среде [1, 3–6], стартовый разгон космического корабля с постоянно уменьшающимися по высоте массой, плотностью воздуха и ускорением силы тяжести [7, 8], импульсный разгон или торможение искусственных тел и др.

В качестве примера для учета вышеуказанного переменного ускорения рассмотрим значение скорости  $V(t)$  в зависимости от времени  $t$  для прямолинейного движения в виде

$$V(t) = V_0 + a_\Phi \cdot t, \quad (1)$$

в котором  $V_0$  – начальное значение скорости;  $a_\Phi$  – переменное (форсированное) ускорение, равное

$$a_\Phi = a_0 + \Phi \cdot t, \quad (2)$$

где  $a_0$  – начальное ускорение (м/сек<sup>2</sup>);  $\Phi$  – вновь вводимый параметр форсированного ускорения – «форсаж» (м/сек<sup>3</sup>), характеризующий режим изменения ускорения и определяемый как производная по времени от изменяющихся значений ускорения  $a(t)$  – первая производная, скорости  $V(t)$  – вторая производная и расстояния  $S(t)$  – третья производная, в виде

$$\Phi = a'(t) = V''(t) = S'''(t). \quad (3)$$

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

При движении с переменным ускорением форсированное значение скорости  $V(t) = V_\Phi$  в момент времени  $t$  получит вид

$$V_\Phi = V_0 + (a_0 + \Phi \cdot t)t = V_0 + a_0 \cdot t + \Phi \cdot t^2, \quad (4)$$

при этом средняя скорость движения  $V_{cp}$  будет равна

$$V_{cp} = V_0 + \frac{a_0 + a_\Phi}{2} t = V_0 + a_0 \cdot t + \frac{1}{2} \Phi \cdot t^2. \quad (5)$$

Пример подобного (4) изменения скорости движения тела (с «1» вместо параметра  $\Phi$ ) рассмотрен П. Ф. Фильчаковым [9, с. 302].

В зависимости от соотношений значений начального ускорения  $a_0$  и форсажа  $\Phi$  (положительного, отрицательного) получим нижеследующую классификацию частных случаев различных видов форсированного движения с переменным ускорением:

- при  $a_0 = 0$ ;  $\Phi = 0$  – равномерное движение (или покой) (рис., прямая 1);
- при  $a_0 > 0$ ;  $\Phi = 0$  – равноускоренное движение (рис., прямая 2);
- при  $a_0 < 0$ ;  $\Phi = 0$  – равнозамедленное движение (рис., прямая 3);
- при  $a_0 = 0$ ;  $\Phi > 0$  – ускоряющееся движение (рис., кривая 4);
- при  $a_0 > 0$ ;  $\Phi > 0$  – импульсно ускоряющееся движение (рис., кривая 5);
- при  $a_0 < 0$ ;  $\Phi > 0$  – плавно замедляющееся движение (рис., кривая 6);
- при  $a_0 = 0$ ;  $\Phi < 0$  – замедляющееся движение (рис., кривая 7);
- при  $a_0 > 0$ ;  $\Phi < 0$  – ускоренное движение с замедлением (рис., кривая 8);
- при  $a_0 < 0$ ;  $\Phi < 0$  – импульсно замедляющееся движение (рис., кривая 9).

Параметр « $\Phi$ » является векторной величиной и может иметь как постоянное, так и переменные значения, в том числе в виде различных функций (линейных, нелинейных, тригонометрических, логарифмических и др.). Очевидно, что в таких случаях будут представлены решения для множества самых разнообразных форм движений с переменными ускорениями.

Использование указанного параметра открывает широкие возможности при определении текущих динамических характеристик тел в заданные моменты времени при различных формах форсированного движения.

Величина пройденного пути  $S_\Phi$  в момент времени  $t$  при форсированных движениях с переменным ускорением  $a_\Phi$  определится по формуле

$$S_\Phi = \int_0^t V_\Phi dt = V_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 + \frac{1}{3} \Phi \cdot t^3, \quad (6)$$

в которой  $V_0$  и  $a_0$  означают значения скорости и ускорения движения в начальный момент времени форсировки движения.

Сила  $F_\Phi$ , действующая на тело массой  $m$ , движущееся с переменным ускорением (в форсированном движении) в момент времени  $t$  от начала форсировки движения, будет равна

$$F_\Phi = m \cdot a_\Phi = m(a_0 + \Phi \cdot t), \quad (7)$$

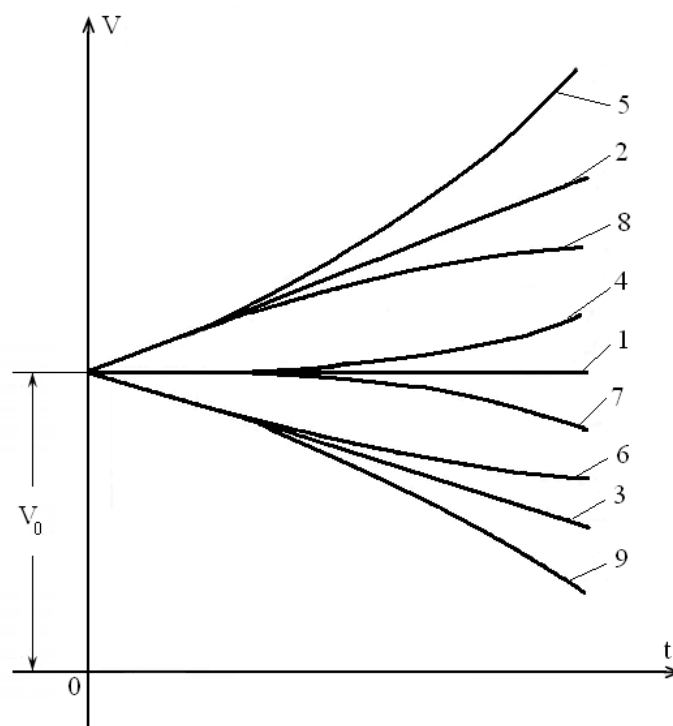
а выполненная работа  $A_\Phi$  к этому времени определится зависимостью

$$A_\Phi = F_\Phi \cdot S_\Phi. \quad (8)$$

Аналогичным образом могут быть определены и другие кинематические и динамические характеристики тел, движущихся с переменным ускорением как при форсированных

вращательных движениях (маятника [10, 11] и др.), так и в безвихревых потенциальных потоках [12, с. 33].

На рисунке показана схема графиков очертаний зависимостей  $V(t)$  для различных форм движений с переменными ускорениями: равномерного (прямая 1), равноускоренного и равнозамедленного (прямые 2, 3), а также для форсированных движений с различными соотношениями значений ускорений (кривые 4–9). Как видно из рисунка, при различных соотношениях значений начального ускорения  $a_0$  и форсажа  $\Phi$  существенно изменяются очертания графиков скоростей движения, что необходимо учитывать при определении текущих кинематических и динамических характеристик тел в заданные моменты времени.



**Рис.** Схема очертаний графиков различных видов движений с переменными ускорениями:

- 1 – равномерное; 2 – равноускоренное; 3 – равнозамедленное; 4 – ускоряющееся;  
 5 – импульсно ускоряющееся; 6 – плавно замедляющееся; 7 – замедляющееся;  
 8 – с замедляющимся ускорением; 9 – импульсно замедляющееся

**Fig.** Scheme of the outlines of graphs of various types of movements with variable accelerations:

- 1 – uniform; 2 – uniformly accelerated; 3 – uniformly slowing; 4 – accelerating;  
 5 – impulse accelerating; 6 – smoothly slowing down; 7 – slowing down;  
 8 – with decelerating acceleration; 9 – impulsively slowing down

### ВЫВОДЫ

В подавляющем большинстве случаев перемещения как природных тел, так и искусственных объектов, происходят в виде движений с переменным ускорением вследствие условий их возникновения и развития, сопротивления среды, технологических процессов и т.д. Примерами таких форсированных движений с переменными ускорениями могут служить оползание (обвал) геофизических грунтовых массивов, стартовый разгон космического корабля, свободное падение тел в сопротивляющейся среде, импульсный разгон или торможение искусственных тел и др. Для учета переменного ускорения в уравнениях движения предложено ввести

новый параметр – «форсаж –  $\Phi$ , м/сек<sup>3</sup>» – как третью производную (по времени) от пути, вторую от скорости и первую от ускорения. Дана классификация форм движений для частных случаев в зависимости от относительных значений форсированного ускорения. Использование указанного параметра открывает широкие возможности при определении текущих кинематических и динамических характеристик тел в заданные моменты времени при различных формах форсированного движения с переменным ускорением.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жуковский Н. Е. Теоретическая механика. Москва-Ленинград: ГИТТЛ, 1952. 811 с.
2. Яворский Б. М., Селезнев Ю. А. Справочное руководство по физике. Москва: Наука, 1989. 576 с.
3. Бермант А. Ф., Араманович И. Г. Краткий курс математического анализа. Москва: Наука, 1971. 736 с.
4. Добронравов В. В., Никитин Н. Н., Дворников А. Л. Курс теоретической механики. Москва: Высшая школа, 1974. 527 с.
5. Покровский Г. И. Гидродинамика высоких скоростей. Москва: Знание, 1966. 48 с.
6. Беликов В. В. Проблемы брызгового обледенения и образования техногенных осадков в нижних бьефах высоконапорных гидроузлов. Москва, 2016. 151 с.
7. Анахаев К. Н. К расчету ускорения свободного падения на поверхности Земли // Известия РАН. Механика твердого тела. 2017. № 6. С. 14–23.
8. Цубой Т. Гравитационное поле Земли. Москва: Мир, 1982. 286 с.
9. Фильчаков П. Ф. Справочник по высшей математике. Киев: Наукова думка, 1973. 743 с.
10. Анахаев К. Н. К расчету математического маятника // Доклады Академии наук. 2014. Т. 459. № 3. С. 288–293. DOI: 10.7868/S0869565214330081.
11. Анахаев К. Н. О ротационном (вращательном) движении математического маятника // Доклады Академии наук. 2015. Т. 462. № 4. С. 412–417. DOI: 10.7868/S0869565215160082.
12. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Москва: Физматгиз, 1963. 583 с.

### Информация об авторе

**Анахаев Кошкинбай Назирович**, д-р техн. наук, проф., гл. науч. сотр. отдела математического моделирования геофизических процессов, Институт прикладной математики и автоматизации – филиал Кабардино-Балкарского научного центра РАН;  
360000, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А;  
anaha13@mail.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4357-4349>

### REFERENCES

1. Zhukovsky N.E. *Teoreticheskaya mekhanika* [Theoretical mechanics]. Moscow-Leningrad: GITL, 1952. 811 p. (In Russian)
2. Yavorsky B.M., Seleznev Yu.A. *Spravochnoye rukovodstvo po fizike* [Reference guide to physics]. Moscow: Nauka, 1989. 576 p. (In Russian)
3. Bermant A.F., Aramanovich I.G. *Kratkiy kurs matematicheskogo analiza* [A Short Course in Mathematical Analysis]. Moscow: Nauka, 1971. 736 p. (In Russian)
4. Dobronravov V.V., Nikitin N.N., Dvornikov A.L. *Kurs teoreticheskoy mekhaniki* [Course of Theoretical Mechanics]. Moscow: Vysshaya shkola, 1974. 527 p. (In Russian)
5. Pokrovsky G.I. *Gidrodinamika vysokikh skorostey* [Hydrodynamics of High Speeds]. Moscow: Znaniye, 1966. 48 p. (In Russian)

6. Belikov V.V. *Problemy bryzgovogo obledeneniya i obrazovaniya tekhnogennykh osadkov v nizhnikh b'yefakh vysokonapornykh gidrouzlov* [Problems of spray icing and the formation of technogenic precipitation in the downstream pools of high-pressure waterworks]. Moscow, 2016. 151 p. (In Russian)
7. Anakhaev K.N. To the calculations of the free fall acceleration on the Earth surface. *Mechanics of Solids*. 2017. No. 52. Pp. 605–612. DOI:10.3103/S0025654417060024.
8. Tsuboi T. *Gravitatsionnoye pole Zemli* [Gravitational field of the Earth]. Moscow: Mir, 1982. 286 p. (In Russian)
9. Filchakov P.F. *Spravochnik po vysshey matematike* [Handbook of higher mathematics]. Kiev: Naukova dumka, 1973. 743 p. (In Russian)
10. Anakhaev K.N. A contribution to calculation of the mathematical pendulum. *Doklady Physics*. 2014. Vol. 59. No. 11. Pp. 528–533. DOI: 10.7868/S0869565214330081.
11. Anakhaev K.N. On the rotational (rotational) motion of a mathematical pendulum. *Doklady Physics*. 2015. Vol. 60. No. 6. Pp. 249–254. DOI: 10.7868/S0869565215160082.
12. Kochin N.E., Kibel I.A., Roze N.V. *Teoreticheskaya gidromekhanika* [Theoretical Hydro-mechanics]. Moscow: Fizmatgiz, 1963. 583 p. (In Russian)

#### Information about the author

**Anakhaev Koshkinbai Nazirovich**, Doctor of Technical Sciences, Professor, Chief Researcher of the Department of Mathematical Modeling of Geophysical Processes, Institute of Applied Mathematics and Automation – branch of Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences; 360000, Russia, Nalchik, 89 A Shortanov street; anaha13@ mail.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4357-4349>