ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 517.95 Научная статья
DOI: 10.35330/1991-6639-2022-4-108-11-18

Обратная задача определения источника, зависящего от пространственных переменных в гиперболическом уравнении третьего порядка

Б. С. Аблабеков, А. К. Жороев

Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына
720033, Кыргызская Республика, Бишкек, ул. Фрунзе, 547

Аннотация. Работа посвящена доказательству существования и единственности решения обратной задачи определения источника для гиперболического уравнения третьего порядка. Ставится обратная задача, состоящая в определении неизвестного источника, зависящего от пространственных переменных. В качестве дополнительной информации для решения обратной задачи задаются значения решения задачи во внутренней точке. Доказательство основано на выводе линейной системы интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно неизвестного источника.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, обратная задача, функция источника, единственность, существование, уравнение Вольтерра, переопределение

Поступила 30.05.2022, одобрена после рецензирования 20.07.2022, принята к публикации 21.07.2022

Для цитирования. Аблабеков Б. С., Жороев А. К. Обратная задача определения источника, зависящего от пространственных переменных в гиперболическом уравнении третьего порядка // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2022. № 4(108). С. 11–18. DOI: 10.35330/1991-6639-2022-4-108-11-18

MSC: 35L30 Original article

The inverse problem of determining the source depending on spatial variables in a hyperbolic equation of the third order

B.S. Ablabekov, A.K. Joroev

Kyrgyz national University named J. Balasagyn
720033, Kyrgyz Republic, Bishkek, 547 Frunze street

Annotation. The work is devoted to the proof of the existence and uniqueness of the solution of the inverse problem of determining the source for a hyperbolic equation of the third order. An inverse problem is posed, which consists in determining an unknown source that depends on spatial variables. As additional information for solving the inverse problem, the values of the solution of the problem at the interior point are given. The proof is based on the derivation of a linear system of Volterra integral equations of the second kind with respect to an unknown source.

Key words: hyperbolic equation, inverse problem, source function, uniqueness, existence, Volterra equation, redefinition

Submitted 30.05.2022, approved after reviewing 20.07.2022, accepted for publication 21.07.2022

For citation. Ablabekov B.S., Joroev A.K. The inverse problem of determining the source depending on spatial variables in a hyperbolic equation of the third order. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS.* 2022. No. 4(108). Pp. 11–18. DOI: 10.35330/1991-6639-2022-4-108-11-18

Введение

Задачи, связанные с моделированием процессов фильтрации жидкости в трещиновато-пористых средах [1], процесс влагопереноса в почво-грунтах [2, 3], передачи тепла в гетерогенной среде [4] описываются псевдопараболическими и псевдогиперболическими уравнениям третьего порядка. Распространение акустических волн в слабонеоднородных средах [5] приводится к краевым задачам для гиперболического уравнения третьего порядка.

Под обратными задачами для дифференциальных уравнений понимают задачи нахождения неизвестных коэффициентов, правых частей, а также начальных или граничных условий и решений дифференциальных уравнений по заданной дополнительной информации (переопределении) о решении прямой задачи.

Обратные задачи являются динамично развивающимся направлением современной математики. Обратным задачам для гиперболических и параболических уравнений второго порядка посвящено очень много работ. Например, в монографиях В. Г. Романова [6, 7], С. И. Кабанихина [8] исследованы обратные задачи для гиперболических уравнений, а монографии Ю. Я. Белова [9], М. Иванчова [10], А. И. Прилепко, И. А. Васина, Д. Г. Орловского [11] посвящены обратным задачам для параболических уравнений второго порядка. В монографиях [12, 13] изучены обратные задачи для псевдопараболических и псевдо-гиперболических уравнений третьего порядка.

Для гиперболических уравнений третьего порядка известны некоторые результаты. Например, обратная задача определения неизвестного коэффициента, зависящего от времени, для гиперболического уравнения третьего порядка исследована в работе [14], а в работе [15] изучена обратная задача определения источника, зависящего от времени. Обратные задачи определения источника, зависящего от пространственных переменных, ранее не рассматривались.

Постановка обратной задачи. Основной результат

В работе рассматривается вопрос об однозначной разрешимости обратной задачи определения пары функций $\{u(x,t),\ f(x)\}$, удовлетворяющих в D_T гиперболическому уравнению третьего порядка

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x,t)=f(x)h(x,t)+g(x,t),\ (x,t)\in\Delta_T, \tag{1}$$

удовлетворяющему начальным условиям

$$u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=u_1(x),\quad u_{tt}(x,0)=u_2(x),\quad -T\le x\le T, \tag{2}$$

и условиям переопределения

$$u(0,t)=\varphi_0(t),\ u_x(0,t)=\varphi_1(t),\ u_{xx}(0,t)=\varphi_2(t),\ 0\le t\le T. \tag{3}$$

Здесь $\Delta_T=\{(x,t):-(T-t)<x<T-t,\,0\le t\le T\}$, $h(x,t), g(x,t)$, $u_i(x)$, $\varphi_i(t)$ $(i=0,1,2)$ – заданные функции.

Другими словами, требуется по известным функциям $h(x,t), g(x,t), u_i(x)$, $\varphi_i(t)$ $(i=0,1,2)$ найти пару функций $\{u(x,t),\ f(x)\}$, удовлетворяющих (1)-(3).

Отметим, что в обратной задаче (1)-(3) области определения искомой функции и заданных дополнительных информаций не совпадают. Обратные задачи для гиперболического уравнения второго порядка в аналогичной постановке изучались в работах В. Г. Романова (см. [6]).

Определение. Решением обратной задачи (1)-(3) называется пара функций $\{u(x,t), f(x)\}$, таких, что $u(x,t)\in C^3(\Delta_T)$, $f(x)\in C[-T,T]$, и функции $u(x,t)$, $f(x)$ удовлетворяют (1)-(2) в области Δ_T, а также условию (3) для $0\le t\le T$.

Сформулируем и докажем теорему о существовании и единственности решения прямой задачи (1), (2).

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $u_i(x)\in C^{3-i}(-T\le x\le T)$, $i=0,1,2$, $f(x)\in C[-T,T]$, $h(x,t), g(x,t)\in C^1(\Delta_T)$. *Тогда в области* Δ_T *существует единственная функция* $u(x,t)$, *такая, что* u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, u_{xxx}, u_{xxt}, u_{xtt}, $u_{ttt}\in C(\Delta_T)$, *и удовлетворяет задаче (1), (2).*

Доказательство. Пусть $\upsilon(x,t)$ есть решение задачи (1), (2) при $f(x)=0$, и это решение определяется формулой

$$\upsilon(x,t)=\frac{1}{4}u_0(x+t)+\frac{3}{4}u_0(x-t)+\frac{t+x}{2}u_0'(x-t)+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}u_1(s)ds+$$

$$+\frac{1}{4}\int_{x-t}^{x+t}(x+t-s)u_2(s)ds+\frac{1}{4}\int_0^t\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}(x-s+t-\tau)g(s,\tau)ds\,d\tau\,. \quad (4)$$

Тогда решение задачи (1)-(2) имеет вид

$$u(x,t)=\upsilon(x,t)-\frac{1}{4}\int_0^t\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}(x-s+t-\tau)f(s)h(s,\tau)ds\,d\tau\,,\quad (x,t)\in\Delta_T\,. \quad (5)$$

Покажем, что полученное решение в области Δ_T имеет непрерывные частные производные до третьего порядка и является классическим решением задачи (1), (2).

В силу условий, наложенных на функции $u_i(x), i=0,1,2,$ $h(x,t), g(x,t)$, функция $\upsilon(x,t)\in C^3(\Delta_T)$. Тогда выражение, стоящее справа в формуле (5), имеет частные производные первого порядка:

$$u_t(x,t)=\upsilon_t(x,t)-\frac{1}{2}\int_0^t(t-\tau)f(x-t+\tau)h(x-t+\tau,\tau)d\tau-\frac{1}{4}\int_0^t\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}f(s)h(s,\tau)ds\,d\tau\,, \quad (6)$$

$$u_x(x,t)=\upsilon_x(x,t)+\frac{1}{2}\int_0^t(t-\tau)f(x-t+\tau)h(x-t+\tau,\tau)d\tau-\frac{1}{4}\int_0^t\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}f(s)h(s,\tau)ds\,d\tau\,. \quad (7)$$

Равенства (6), (7) показывают, что функции $u_t(x,t)$, $u_x(x,t)$ являются непрерывными функциями в области Δ_T. Покажем, что из свойств заданных функций $u_i(x), h(x,t), g(x,t)$ также следуют существование и непрерывность частных производных второго и третьего порядков:

$$u_{tt}(x,t)=v_{tt}(x,t)-\frac{1}{2}\int_0^t f(x-t+\tau)h(x-t+\tau,\tau)d\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t (t-\tau)f(x-t+\tau)h_x(x-t+\tau,\tau)d\tau-$$

$$-\frac{1}{4}\int_0^t f(x-t+\tau)\left[h(x+t-\tau,\tau)+h(x-t+\tau,\tau)\right]d\tau,$$

$$u_{tx}(x,t)=v_{tx}(x,t)-\frac{1}{2}\int_0^t (t-\tau)f(x-t+\tau)h_x(x-t+\tau,\tau)d\tau-$$

$$-\frac{1}{4}\int_0^t f(x-t+\tau)\left[h(x+t-\tau,\tau)-h(x-(t-\tau),\tau)\right]d\tau.$$

Далее, обращая оператор $\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ и используя данные задачи Коши, из (1), (2) получим

$$(u_t+u_x)(x,t)=F(x,t)+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(s)h(s,\tau)dsd\tau, \tag{8}$$

где $F(x,t)$ выражается через функции $u_i(x),\ i=0,1,2,\ g(x,t)$.

Дифференцируя (8) по x и t, получим

$$\left(u_t+u_x\right)_t=F_t\left(x,t\right)+\frac{1}{2}\int_0^t\left[f\left(x+t-\tau\right)h\left(x+t-\tau,\tau\right)+f\left(x-t+\tau\right)h\left(x-t+\tau,\tau\right)\right]d\tau\ , \tag{9}$$

$$\left(u_t+u_x\right)_x=F_x\left(x,t\right)+\frac{1}{2}\int_0^t\left[f\left(x+t-\tau\right)h\left(x+t-\tau,\tau\right)-f\left(x-t+\tau\right)h\left(x-t+\tau,\tau\right)\right]d\tau\ . \tag{10}$$

С помощью замены $t-\tau=z$ из равенств (9), (10) приходим к системе

$$(u_t+u_x)_t=F_t(x,t)-\frac{1}{2}\int_0^t\left[f(x+z)h(x+z,t-z)+f(x-z)h(x-z,t-z)\right]dz, \tag{11}$$

$$(u_t+u_x)_x=F_x(x,t)-\frac{1}{2}\int_0^t\left[f(x+z)h(x+z,t-z)-f(x-z)h(x-z,t-z)\right]dz. \tag{12}$$

Дифференцируя (11), (12) по t, а затем (12) по x, получим

$$\left(u_t+u_x\right)_{tt}=F_{tt}\left(x,t\right)-\left[f\left(x+t\right)h\left(x+t,0\right)+f\left(x-t\right)h\left(x-t,0\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\left[f\left(x+z\right)h_t\left(x+z,\ t-z\right)+f\left(x-z\right)h_t\left(x-z,t-z\right)\right]d\tau\ , \tag{13}$$

$$\left(u_t+u_x\right)_{xt}=F_{xt}\left(x,t\right)-\left[f\left(x+t\right)h\left(x+t,0\right)-f\left(x-t\right)h\left(x-t,0\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\left[f\left(x+z\right)h_t\left(x+z,\ t-z\right)-f\left(x-z\right)h_t\left(x-z,t-z\right)\right]d\tau\ , \tag{14}$$

$$\left(u_t+u_x\right)_{xx}=F_{xx}(x,t)-\frac{1}{2}\int_0^t\left[f_x(x+z)h(x+z,\,t-z)+f(x+z)h_x(x+z,t-z)\right]d\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\left[f_x(x-z)h(x-z,\,t-z)+f(x-z)h_x(x-z,t-z)\right]d\tau\,. \tag{15}$$

Из формул (11)-(15) следует, что $u_{tt}(x,t)$, $u_{xt}(x,t)$, $u_{xx}(x,t)$, $u_{ttt}(x,t)$, $u_{ttx}(x,t)$, $u_{xxt}(x,t)$, $u_{xxx}(x,t)$ являются непрерывными функциями в Δ_T, а функция $u(x,t)$ является классическим решением задачи (1), (2). Теорема 1 доказана.

Перейдем к исследованию обратной задачи.

Заметим, что при выполнении условий теоремы 1 функции $\varphi_i(t)$ $(i=0,1,2)$, являющиеся данными обратной задачи, должны обладать следующей гладкостью:

$$\varphi_i(t)\in C^{3-i}[0,T],\, i=0,1,2\,. \tag{16}$$

Кроме того, функции $\varphi_i(t)$ $(i=0,1,2)$ должны удовлетворять некоторым условиям согласования:

$$\begin{gathered}u_0(0)=\varphi_0(0),\;\; u_0'(0)=\varphi_1(0)\,,\;\; u_0''(0)=\varphi_2(0)\,,\\ u_1(0)=\varphi_0'(0),\;\; u_1'(0)=\varphi_1'(0)\,,\;\; u_1''(0)=\varphi_2'(0)\,,\\ u_2(0)=\varphi_0''(0),\;\; u_2'(0)=\varphi_1''(0)\,,\;\; u_2''(0)=\varphi_2''(0)\,.\end{gathered} \tag{17}$$

ТЕОРЕМА 2. *Пусть для функций* $u_i(x),\, i=0,1,2,$ $h(x,t), g(x,t)$ *выполнены условия теоремы 1,* $\left|h(0,t)\right|\geq\alpha>0,$ $t\in[0,t_0]$, *а для функций* $\varphi_i(t)$ $(i=0,1,2)$ *– условия гладкости (16) и условия согласования (17). Тогда для любого* $T>0$ *на отрезке* $[-T,T]$ *существует единственное решение обратной задачи (1)-(3) и принадлежит классу* $C[-T,T]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим в формулах (13), (14) $x=0$ и воспользуемся дополнительной информацией (3). Тогда

$$\varphi_0'''(t)+\varphi_1''(t)=F_{tt}(0,t)-\left[f(t)h(t,0)+f(-t)h(-t,0)\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\left[f(x+z)h_t(z,\,t-z)+f(-z)h_t(-z,t-z)\right]d\tau\,,$$

$$\varphi_1''(t)+\varphi_2'(t)=F_{xt}(0,t)-\left[f(t)h(t,0)-f(-t)h(-t,0)\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\left[f(z)h_t(z,\,t-z)-f(-z)h_t(-z,t-z)\right]d\tau\,.$$

Складывая и вычитая эти равенства, с учетом $\left|h(0,t)\right|\geq\alpha>0,$ получаем

$$f(t)+\frac{1}{2h(0,t)}\int_0^t h_t(z,t-z)\,f(z)dz=F_1(t), \tag{18}$$

$$f(-t) + \frac{1}{2h(0,t)} \int_0^t h_t(-z, t-z) f(-z) dz = F_2(t), \tag{19}$$

где

$$F_1(t) = \left[\left(F_{tt} + F_{xt} \right)(0,t) - \varphi_0'''(t) - 2\varphi_1''(t) - \varphi_2'(t) \right] / \, 2h(0,t),$$

$$F_2(t) = \left[\left(F_{tt} - F_{xt} \right)(0,t) - \varphi_0'''(t) - \varphi_2'(t) \right] / \, 2h(0,-t).$$

Система (18), (19) представляет собой систему линейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно функций $f(t)$, $f(-t)$. В силу условий теоремы функции $F_1(t), F_2(t)$, а также ядра $\frac{h_t(z,t-z)}{2h(0,t)}$, $\frac{h_t(-z,t-z)}{2h(0,t)}$ являются непрерывными функциями. Следовательно, система (18), (19) для любого $T > 0$ имеет единственное решение на отрезке $[-T, T]$. Подставляя найденную функцию $f(t)$ в (5), однозначно находим функцию $u(x,t)$. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикладная математика и механика. 1960. Т. 24. № 5. С. 58–73.
2. *Hallaire M.* L’eau et la productions vegetable // Institut National de la Recherche Agronomique, 1964. № 9.
3. *Чудновский А. Ф.* Теплофизика почвы. Москва: Наука, 1976. 352 с.
4. *Дзекцер Е. С.* Уравнения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах // Доклады АН СССР. 1975. Т. 220. № 3. С. 540–543.
5. *Руденко О. В., Солуян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. Москва: Наука, 1975. 289 с.
6. *Романов В. Г.* Обратные задачи математической физики. Москва: Наука, 1984. 264 с.
7. *Романов В. Г.* Устойчивость в обратных задачах. Москва: Научный Мир, 2005. 295 с.
8. *Kabanikhin S.I.* Inverse and Ill-Posed Problems: Theory and Applications. Berlin: De Gruyter. 2011.
9. *Belov Yu.Ya.* Inverse problems for partial differential equations. Utrecht: VSP. 2002.
10. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type. Mathematical studies. Monograph Series. 2003.
11. *Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York: Marcel Dekker, 2000.
12. *Аблабеков Б. С.* Обратные задачи для псевдопараболических уравнений. Бишкек: Илим, 2001. 183 с.
13. *Аблабеков Б. С., Асанов А. Р., Курманбаева А. К.* Обратные задачи для дифференциальных уравнений третьего порядка. Бишкек: Илим, 2011. 156 с.
14. *Аблабеков Б. С., Жороев А. К.* Об определении зависящего от времени младшего коэффициента в гиперболическом уравнении третьего порядка // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 34. № 1. С. 9–18.

15. *Аблабеков Б. С., Жороев А. К.* Об определении источника, зависящего от времени в гиперболическом уравнении третьего порядка // Евразийское Научное Объединение. 2021. Т. 1. № 7 (77). С. 1–3.

Информация об авторах

Аблабеков Бактыбай Сапарбекович, д-р физ.-мат. наук, проф., профессор кафедры прикладной математики, информатики и компьютерных технологий, Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына;

720033, Кыргызская Республика, г. Бишкек, ул. Фрунзе, 547;

ablabekov_63@mail.ru, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0805-3532

Жороев Автандил Кемелович, асп. кафедры прикладной математики, информатики и компьютерных технологий, Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына;

720033, Кыргызская Республика, г. Бишкек, ул. Фрунзе, 547;

joroev1962@mail.ru, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5210-1247

REFERENCES

1. Barenblatt G.I., Zheltov Yu.P., Kochina I.N. Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks, Applied mathematics and mechanic, Vol. 24, No. 5. 1960. Pp. 58–73. (in Russian).

2. Hallaire M. L'eau et la productions vegetable. *Institut National de la Recherche Agronomique,* 1964. No. 9.

3. Chudnovsky A.F. *Teplofizika pochvy* [Thermophysics of the soil]. Nauka: Moscow, 1976. 352 p. (in Russian).

4. Dzektser E.S., Equation of motion of underground water with a free surface in multilayer media, *Soviet Mathematics. Doklady,* 1975. Vol. 220. No. 3. Pp. 540–543. (in Russian)

5. Rudenko O.V., Soluyan S.I. Theoretical Principles of Nonlinear Acoustics. Nauka: Moscow, 1975. (in Russian)

6. Romanov V.G. *Obratnye zadachi matematicheskoj fiziki* [Inverse Problems of Mathematical Physics]. Moscow: Nauka, 1984. 264 p. (in Russian)

7. Romanov V.G. *Ustojchivost' v obratnyh zadachah* [Stability in inverse problems]. Moscow: Nauchnyy mir. 2005. (in Russian)

8. Kabanikhin S.I. Inverse and Ill-Posed Problems: Theory and Applications. Berlin: De Gruyter, 2011.

9. Belov Yu.Ya. Inverse problems for partial differential equations. Utrecht: VSP, 2002.

10. Ivanchov M. Inverse problems for equations of parabolic type. Mathematical studies. Monograph Series. 2003.

11. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York: Marcel Dekker, 2000.

12. Ablabekov B.S. Inverse problems for pseudoparabolic equations, Bishkek: Ilim, 2001. 183 p. (In Russian)

13. Ablabekov B.S., Asanov A.R., Kurmanbaeva A.K. Inverse problems for equation of the third order, Bishkek: Ilim, 2011. 156 p. (In Russian)

14. Ablabekov B.S., Joroev A.K. On the definition of time-dependent minor coefficient in the third-order hyperbolic equation. Vestnik KRAUNC. Fiziko-matematicheskie nauki (Physics and mathematics), 2021. No. 1. (34). Pp. 9–18. (in Russian)

15. Ablabekov B.S., Joroev A.K. On determining the source of the time-dependent third-order hyperbolic equation. *Evrazijskoe Nauchnoe Ob'edinenie* [Eurasian Scientific Association]. Vol. 1. No. 7 (77). 2021. Pp. 1−3. (In Russian)

Information about the authors

Ablabekov Baktybai Saparbekovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Applied Mathematics, Informatics and Computer Technologies, Kyrgyz National University named after J. Balasagyn;

720033, Kyrgyz Republic, Bishkek, 547 Frunze street;

ablabekov_63@mail.ru, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0805-3532

Joroev Avtandil Kemelovich, Postgraduate Student, Department of Applied Mathematics, Informatics and Computer Technologies, Kyrgyz National University named after J. Balasagyn;

720033, Kyrgyz Republic, Bishkek, 547 Frunze street;

joroev1962@mail.ru, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5210-1247