УДК 517.583; 517.927; 624.072.21
DOI: 10.35330/1991-6639-2022-2-106-11-16
EDN: CNDYIB

Научная статья

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОГО ИЗГИБА КОНСОЛИ

К.Н. АНАХАЕВ

Институт прикладной математики и автоматизации –
филиал Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук
360000, Россия, Нальчик, ул. Шортанова, 89 А

Аннотация. Приводится усовершенствованная методика решения классической нелинейной задачи изгиба консоли от действия вертикальной силы. Предложены новые расчетные зависимости, позволяющие напрямую (без подбора) установить аналитическую взаимосвязь модуля эллиптических функций и интегралов с силовым коэффициентом подобия, определяемым для исходно заданных характеристик консоли и действующей нагрузки, сравнение результатов подсчета по которым с точными значениями модуля дало достаточно близкое совпадение (< 1 %). Изложенное дает возможность прямого решения рассматриваемой задачи с определением основных параметров изгибаемой консоли, таких как координаты ее очертания, изгибаемые углы и др. Полученные результаты могут быть использованы, в частности, при конструировании защитных сооружений от опасных склоновых геофизических процессов и др.

Ключевые слова: консоль, изгиб консоли, нелинейная задача, эллиптические функции Якоби, эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода, силовой коэффициент подобия

Статья поступила в редакцию 19.01.2022 *Принята к публикации 02.03.2022*

Для цитирования. Анахаев К.Н. К решению задачи нелинейного изгиба консоли // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2022. № 2 (106). С. 11–16. DOI: 10.35330/1991-6639-2022-2-106-11-16

Введение

Как известно, решению задачи нелинейного изгиба консоли посвящен ряд работ [1–3 и др.], в которых, как правило, рассматривается изгиб консоли тонкого упругого горизонтального стержня длиной L с жестко защемленным одним концом и воздействием на другой (свободный) конец поперечной вертикальной силы P. При этом уравнение равновесия такого стержня имеет вид

$$EJ\frac{d^2\theta}{dl^2}+P\cos\theta=0\,, \tag{1}$$

в котором E – модуль упругости (модуль Юнга); J – момент инерции; EJ – изгибная жесткость стержня; l и $\theta(l)$ – текущие значения длины (неизменной) дуги стержня и угла между касательной к текущей точке стержня и горизонтальной осью декартовой системы координат xOy с центром в точке защемления стержня.

© Анахаев К.Н., 2022

Постановка задачи

Выражение (1) преобразовывается в нелинейное уравнение маятника [1–4]

$$\frac{d^2\theta}{dl^2}+\frac{P}{EJ}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{d^2\gamma}{dt^2}+\beta^2\sin\gamma=0\,, \tag{2}$$

где $\beta=\sqrt{PL^2/(EJ)}$ – силовой коэффициент подобия; $\gamma(t)=\pi/2+\theta$ – угол между касательной к текущей точке и осью $0y$; $t=l/L$ – приведенная длина стержня.

Решение уравнения (2) представляется в виде зависимостей [1–3]

$$\left.\begin{aligned}\gamma(t)&=2\arcsin\left[\lambda\cdot\mathrm{sn}\left(\beta t+F(\varphi,\lambda),\lambda\right)\right];\\ \frac{d\gamma(t)}{dt}&=2\cdot\lambda\beta\cdot\mathrm{cn}\left[\beta t+F(\varphi,\lambda),\lambda\right],\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

в которых значения модуля λ, равного $\lambda=\sin\alpha$ (α – модулярный угол), и неполного эллиптического интеграла 1-го рода $F(\varphi,\lambda)$ (φ – амплитуда интеграла) зависят от величины силы P.

При этом с учетом граничных условий, равных $t=0\ \rightarrow\ \theta(0)=0$, $\gamma(0)=\dfrac{\pi}{2}$ и $t=1\ \rightarrow\ \dfrac{d\theta(L)}{dl}=0$, $\dfrac{d\gamma(1)}{dt}=0$, из зависимостей (3) после преобразований следует значение эллиптического синуса Якоби, равное

$$\mathrm{sn}\left[F(\varphi),\lambda\right]=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)/\lambda\,,$$

откуда на основе [2–6] выразим зависимости для значений амплитуды

$$\varphi=\arcsin\left\{\mathrm{sn}\left[F(\varphi),\lambda\right]\right\}=\arcsin\left(\frac{1}{\lambda}\sin\frac{\pi}{4}\right)=\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2\lambda}\right) \tag{4}$$

неполного эллиптического интеграла 1-го рода

$$F(\varphi,\lambda)=F\left[\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2\lambda}\right),\lambda\right]$$

и силового коэффициента подобия

$$\beta=K(\lambda)-F(\varphi,\lambda), \tag{5}$$

где $K(\lambda)$ – полный эллиптический интеграл 1-го рода при модуле λ, изменяющемся в интервале $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\le\lambda<1$ (соответственно, при значениях модулярного угла $\dfrac{\pi}{4}\le\alpha<\dfrac{\pi}{2}$).

По результатам интегрирования соотношений $\dfrac{dx}{dl}=\cos\theta$, $\dfrac{dy}{dl}=\sin\theta$ и преобразований представлены нижеследующие расчетные зависимости (6) для описания очертания изгиба упругого стержня [1–3] при $L=1$ (*в усл. ед.*):

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2\lambda}{K(\lambda)-F(\varphi,\lambda)}\left[\sqrt{1-0.5\lambda^{-2}}-\mathrm{cn}(u,\lambda)\right]; \\ y &= t-\frac{2}{K(\lambda)-F(\varphi,\lambda)}\left\{E\left[am(u),\lambda\right]-E(\varphi,\lambda)\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

в которых $E(\varphi,\lambda)$ и $E\left[am(u),\lambda\right]$ – неполные эллиптические интегралы 2-го рода с модулем λ соответственно при амплитуде $\varphi=\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2\lambda}\right)$ и эллиптической амплитуде Якоби $am(u)=\arcsin\left[\mathrm{sn}(u,\lambda)\right]$[5, 6]. При этом значение угла u в эллиптических функциях Якоби – синусе $\mathrm{sn}(u,\lambda)$ и косинусе $\mathrm{cn}(u,\lambda)$ – определяется по зависимости [2, 3]:

$$u=\left[K(\lambda)-F(\varphi,\lambda)\right]t+F(\varphi,\lambda). \tag{7}$$

В вышеприведенных формулах (3)–(7) величина λ находится в зависимости от силовой нагрузки β методом подбора при известной нагрузке P – задаваясь значениями λ в формуле для определения критической нагрузки [2, 3]:

$$\frac{P}{P_c}=\left(\frac{2\beta}{\pi}\right)^2=4\left[\frac{K(\lambda)-F(\varphi,\lambda)}{\pi}\right]^2,$$

где $P_c=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\frac{EJ}{L^2}$ – эйлерова критическая сила.

Основные результаты

Следует отметить, что аналитическое решение различных прикладных задач механики с эллиптическими функциями Якоби и эллиптическими интегралами 1-го и 2-го рода (не выражающимися через элементарные функции) представляет значительные математические трудности, связанные в том числе с использованием специальных графиков и таблиц и необходимостью нелинейного, перекрестного и обратного интерполирования их данных. Результаты же численных решений, определяя дискретные цифровые значения специальных функций (интегралов) в отдельных точках, ограничены в возможностях выявления причинно-следственных связей (в виде аналитических формул) исходных факторов и оценке их влияния на итоговые результаты [5, 6].

В связи с этим для аналитического решения прикладных задач можно использовать расчетные зависимости для определения эллиптических интегралов 1-го и 2-го рода K, $F(\varphi)$, $E(\varphi)$, $E\left[am(u)\right]$ и эллиптических функций Якоби $\mathrm{sn}(u)$ и $\mathrm{cn}(u)$ (с погрешностью << 1- 2 %), представленные в элементарных функциях [7–10], в том числе и для заданных значений модуля $\frac{\sqrt{2}}{2}\le\lambda<1$.

При этом для прямого решения задачи рекомендуется использовать нижеследующие формулы (8), позволяющие напрямую (без подбора) устанавливать аналитическую взаимосвязь (с погрешностью < 1%) модуля эллиптических функций Якоби и эллиптических интегралов 1-го и 2-го рода λ с силовым коэффициентом подобия β при значениях модулярного угла $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$, либо в градусах $45^0<\alpha_0<90^0$, где $\alpha_0=\frac{\alpha}{\pi}180^0$:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda = 0.015\pi\beta(1+2\beta)+0.704 \qquad (\text{при} \quad 45^0 < \alpha_0 \le 60^0\ ); \\ &\lambda = \sin\left\{1+0.01(\beta-1)^3+0.425(\beta-1)\left[1-0.266(\beta-1)\right]\right\} \quad (\text{при} \quad 60^0 \le \alpha_0 < 90^0), \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

в которых значение коэффициента β принимается в зависимости от исходно заданных характеристик консоли (E, J, L) и действующей нагрузки P.

В таблице 1 дается сравнение значений модуля $\lambda = f(\beta)$, подсчитанных по формулам (8) для значений коэффициентов β, определенных (по программе «Mathlab») для модулярного угла α (при $45^0 < \alpha_0 < 90^0$), с точными значениями модуля, равного $\lambda = \sin\alpha$.

Таблица 1

Сравнение значений модуля $\lambda = f(\beta)$ по формуле (8) с точными данными

Коэффициент β	Модулярный угол		Значение модуля λ		%
	α_0 (градусы)	α (радианы)	точные данные	по формулам (8)	
при $0.0264 \le \beta \le 1.0783$ ($45^0 < \alpha_0 \le 60^0$)					
0,0264	45,01	0,7854	0,7071	0,7053	-0,25
0,2643	46	0,8028	0,7193	0,7231	+0,52
0,5941	50	0,8727	0,7660	0,7653	-0,10
0,6394	50,7685	0,8861	0,7746	0,7727	-0,25
0,8547	55	0,96	0,8192	0,8131	-0,74
1,0783	60	1,0472	0,8660	0,8644	-0,18
при $1.0783 \le \beta \le 6.2613$ ($60^0 < \alpha_0 < 90^0$)					
1,3009	65	1,1345	0,9063	0,8992	-0,78
1,4053	67,2130	1,1731	0,9219	0,9145	-0,80
1,5467	70	1,2217	0,9397	0,9321	-0,81
1,8454	75	1,3089	0,9659	0,9593	-0,68
2,2541	80	1,3963	0,9848	0,9809	-0,40
2,9460	85	1,4835	0,9962	0,9952	-0,10
3,8606	88	1,5359	0,9994	0,9989	-0,04
4,5534	89	1,5533	0,9998	0,9992	-0,06
6,2613	89,8188	1,5678	0,9999	0,9999	-

Как следует из таблицы 1, результаты подсчетов значений модуля $\lambda = f(\beta)$, подсчитанных по формулам (8) для значений коэффициентов β, определенных (по программе «Mathlab») для модулярного угла $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ($45^0 < \alpha_0 < 90^0$), достаточно близко (< 1 %) совпадают с точными значениями модуля, равного $\lambda = \sin\alpha$.

Выводы

В работе рассматривается усовершенствованная методика решения классической нелинейной задачи изгиба консоли от действия вертикальной силы. Предложены новые расчетные зависимости, позволяющие напрямую (без подбора) установить аналитическую взаимосвязь модуля эллиптических функций и интегралов с силовым коэффициентом подобия, определяемым для исходно заданных характеристик консоли и действующей нагрузки, сравнение результатов подсчета по которым с точными значениями модуля дало достаточно близкое совпадение (< 1 %). Изложенное дает возможность для прямого решения рассматриваемой задачи с определением основных параметров изгибаемой консоли, таких как координаты очертания консоли, изгибаемые углы и др. Полученные результаты могут быть использованы, в частности, при конструировании защитных сооружений от опасных склоновых геофизических процессов и др.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Попов Е.П.* Теория и расчет гибких упругих стержней. Москва: Наука, 1986. 294 с.

2. *Захаров Ю.В., Охоткин К.Г.* Нелинейный изгиб тонких упругих стержней // Прикладная механика и техническая физика. 2002. Т. 43. № 5. С. 124–131.

3. *Захаров Ю.В., Захаренко А.А.* Динамическая потеря устойчивости в нелинейной задаче о консоли // Вычислительные технологии. 1999. Т. 4. № 1. С. 48–54.

4. *Анахаев К.Н.* К расчету математического маятника // Доклады Академии наук. 2014. Т. 459. № 3. С. 288–293.

5. *Милн-Томсон Л.* Эллиптические интегралы // Справочник по специальным функциям. Под редакцией Абрамовица М. и Стиган И. Москва: Наука, 1979. С. 401–441.

6. *Милн-Томсон Л.* Эллиптические функции Якоби и тэта-функции // Справочник по специальным функциям. Под редакцией Абрамовица М. и Стиган И. Москва: Наука, 1979. С. 380–400.

7. *Анахаев К.Н.* О совершенствовании гидромеханических методов расчета потенциальных (фильтрационных) потоков // Инженерные системы-2009. Труды междунар. научн.-практ. конф. Т. 2. Москва: РУДН, 2009. С. 588–595.

8. *Анахаев К.Н.* Об определении эллиптических функций Якоби // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. 2009. № 2. С. 90–95.

9. *Анахаев К.Н.* О полных эллиптических интегралах 3-го рода в задачах механики // Доклады Академии наук. 2017. Т. 473. № 2. С. 151–153.

10. *Анахаев К.Н.* Эллиптические интегралы в нелинейных задачах механики // Доклады Российской академии наук. Физика. Технические науки. 2020. Т. 491. № 2. С. 24–29.

Информация об авторе

Анахаев Кошкинбай Назирович, д-р техн. наук, проф., гл. науч. сотр. отдела «Математическое моделирование геофизических процессов», Институт прикладной математики и автоматизации – филиал Кабардино-Балкарского научного центра РАН;

360000, Россия, Нальчик, ул. Шортанова, 89 А;

anaha13@ mail.ru, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4357-4349

REFERENCES

1. Popov E.P. *Teoriya i raschet gibkikh uprugikh sterzhney* [Theory and calculation of flexible elastic rods]. Moscow: Nauka, 1986. 294 p. (In Russian)

2. Zakharov Yu.V., Okhotkin K.G. Nonlinear bending of thin elastic rods. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika* [Applied mechanics and technical physics]. 2002. Vol. 43. No. 5. Pp. 124–131. (In Russian)

3. Zakharov Yu.V., Zakharenko A.A. Dynamic loss of stability in a nonlinear console problem. *Vychislitel'nyye tekhnologii* [Computational technologies]. 1999. Vol. 4. No. 1. Pp. 48–54. (In Russian)

4. Anakhaev K.N. To the calculation of the mathematical pendulum. *Doklady Akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences]. 2014. Vol. 459. No. 3. Pp. 288–293. (In Russian)

5. Milne-Thomson L. Elliptic integrals. Reference book on special functions. Edited by M. Abramowitz and I. Stigan. Moscow: Nauka, 1979. Pp. 401–441. (In Russian)

6. Milne-Thomson L. Jacobi Elliptic Functions and Theta Functions. Handbook of Special Functions. Edited by Abramovitz M. and Stigan I. Moscow: Nauka, 1979. Pp. 380–400. (In Russian)

7. Anakhaev K.N. On the improvement of hydromechanical methods for calculating potential (filtration) flows: *Inzhenernyye sistemy-2009. Trudy mezhdunar. nauchn.-prakt. konf*. [Engineering Systems-2009. Proceedings of the International scientific-practical conference]. Vol. 2. Moscow: RUDN. 2009. Pp. 588–595. (In Russian)

8. Anakhaev K.N. On definition of Jacobian elliptic functions. *Vestnik RUDN. Seriya: Matematika. Informatika. Fizika* [Herald of RUDN University. Series: Mathematics. Informatics. Physics]. 2009. No. 2. Pp. 90–95. (In Russian)

9. Anakhaev K.N. Complete elliptic integrals of the third kind in problems of mechanics. Doklady Physics. 2017. Vol. 62. No. 3. Pp. 133–135. DOI: 10.1134/S1028335817030053. (In Russian)

10. Anakhaev K.N. Elliptic integrals in nonlinear problems of mechanics. Doklady Physics. 2020. Vol. 65. No. 4. Pp. 142–146. DOI: 10.1134/S1028335820040011. (In Russian)

MSC: 33, 45 Original article

TO SOLVE THE PROBLEM OF NONLINEAR BENDING OF THE CONSOLE

K.N. ANAKHAEV

Institute of Applied Mathematics and Automation –
branch of Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences
360000, Russia, Nalchik, 89 A Shortanov street

Annotation. An improved technique for solving the classical nonlinear problem of bending the console from the action of a vertical force is presented. New design dependencies are proposed, which allow directly (without selection) to establish the analytical relationship of the module of elliptic functions and integrals with a force similarity coefficient determined for the initially defined characteristics of the console and the active load, comparing the results of the calculation of which with the exact values of the module gave a fairly close coincidence (< 1%). The above makes a direct solution of the problem under consideration possible with the definition of the main parameters of the bent console, such as the coordinates of the shape of the console, bending angles, etc. The obtained results can be used, in particular, in designing protective structures against dangerous prone geophysical processes, etc.

Keywords: console, cantilever bend, nonlinear problem, elliptical Jacobi functions, elliptical integrals of 1 and 2 kind, force similarity coefficient

The article was submitted 19.01.2022 *Accepted for publication 02.03.2022*

For citation. Anakhaev K.N. To solve the problem of nonlinear bending of the console. *Izvestiya Kabardino-Balkarskogo nauchnogo centra RAN* [News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS]. 2022. No. 2 (106). Pp. 11–16. DOI: 10.35330/1991-6639-2022-2-106-11-16

Information about the author

Anakhaev Koshkinbai Nazirovich, Doctor of Technical Sciences, Professor, Chief Researcher of the Department of Mathematical Modeling of Geophysical Processes, Institute of Applied Mathematics and Automation – branch of Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences;

360000, Russia, Nalchik, 89 A Shortanov street;

anaha13@ mail.ru, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4357-4349