

ДЛИНА ДУГИ ЛЕМНИСКАТЫ БЕРНУЛЛИ

К.Н. АНАХАЕВ

Институт прикладной математики и автоматизации –
филиал Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук
360000, Россия, Нальчик, ул. Шортанова, 89 А

Аннотация. Кривая лемнискаты Бернулли может быть использована в прикладных исследованиях очертаний скольжения и форм геофизических массивов и природных объектов, сопряжений траекторий прямых и округлых путей, движений стержне-шарнирных конструкций, равноновременных гравитационных движений по кривой лемнискаты и ее хорде (таутохронность) и др. Точное определение длины дуги лемнискаты связано с необходимостью использования неполного эллиптического интеграла 1-го рода (неберущегося), что затрудняет проведение аналитических расчетов и др. Предложенная элементарная зависимость для определения длины дуги лемнискаты Бернулли дает весьма близкое совпадение (< 1-2 %) с базовыми данными численного решения и рекомендуется для использования при решении прикладных задач в различных областях науки и техники.

Ключевые слова: кривые 4-го порядка, лемниската Бернулли, длина дуги лемнискаты, эллиптические интегралы 1-го рода, таутохронность кривой

Статья поступила в редакцию 19.08.2021

Принята к публикации 28.12.2022

Для цитирования. Анахаев К.Н. Длина дуги лемнискаты Бернулли // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2022. № 1 (105). С. 5–11. DOI: 10.35330/1991-6639-2022-1-105-5-11

ВВЕДЕНИЕ

Симметричная алгебраическая кривая 4-го порядка, являющаяся геометрическим местом точек C , для которых произведение расстояний их (радиус-векторов) r_1 и r_2 от двух неподвижных точек на одной прямой – фокусов F_1 и F_2 равно постоянной величине – квадрату фокусного расстояния « a » ($r_1 \cdot r_2 = a^2$), называется *лемнискатой Бернулли* (рис. 1). Впервые эта кривая (похожая на лежащую «восьмерку», знак бесконечности или повязку) была использована Я. Бернулли (1694 г.), который и дал ей название [1].

Очертание лемнискаты Бернулли описывается нижеследующими уравнениями соответственно в декартовых координатах (xOy) и в полярных координатах (θ, r) [2, 3]:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0; \quad (1)$$

$$r = a\sqrt{2 \cos 2\theta}, \quad (2)$$

где r – радиус-вектор при полярном угле θ , отсчитываемом от горизонтальной оси лемнискаты против движения часовой стрелки.

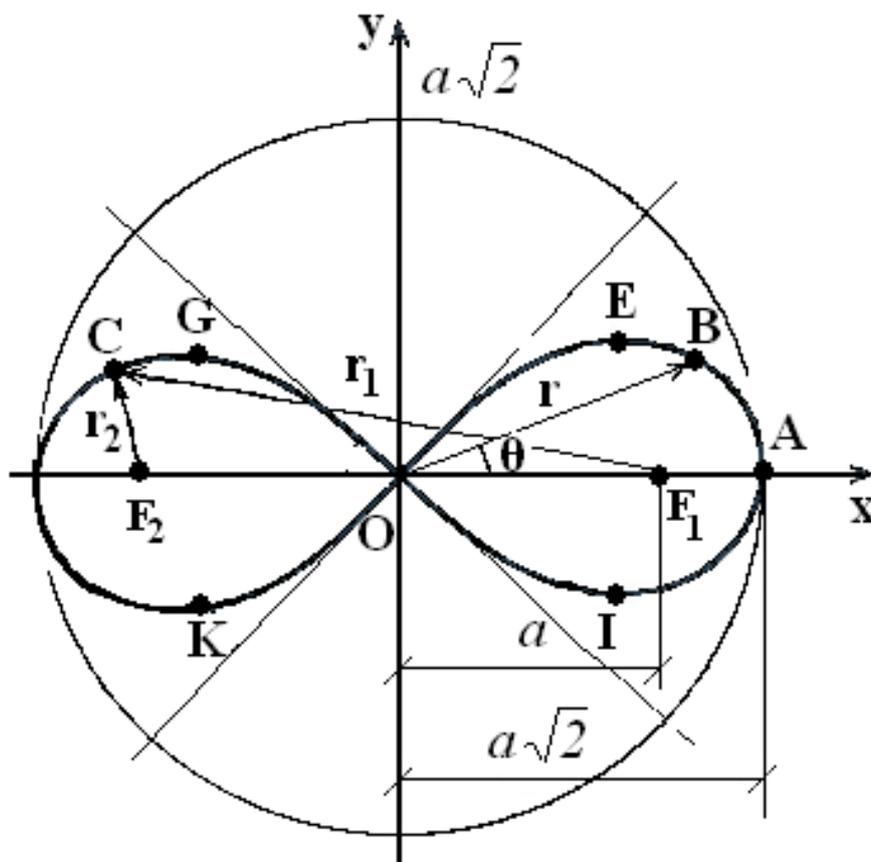


Рис. 1. Расчетная схема лемнискаты Бернулли

Рассматриваемая лемниската может найти практическое использование в прикладных исследованиях очертаний скольжения оползневых геофизических массивов, склоновых форм, береговых примыканий водных и ледниковых природных объектов, сопряжений прямых и округлых траекторий авто- и железнодорожных путей и орбитальных спутников, движений 3-стержневых (4-шарнирных) конструкций. Кроме этого, такое таухронное свойство наклонной лемнискаты Бернулли (на угол $\pi/4$), как одновременность гравитационных движений от узловой точки «O» по кривой лемнискаты и ее хордам (до их пересечений), может быть использовано в различных задачах механики, игровых программах и др.

При этом лемниската Бернулли характеризуется следующими свойствами:

- радиус описанной вокруг лемнискаты окружности равен $a\sqrt{2}$;
- радиус кривизны лемнискаты в рассматриваемой точке с полярными координатами (θ, r) равен $2a^2/3r$;
- площадь S_{OEFI} , очерчиваемая каждой (правой, левой) петлей лемнискаты, равна квадрату фокусного расстояния $S_{OEFI} = a^2$;
- модули радиус-векторов до рассматриваемых точек E, G, K, I с максимальными (абсолютными) значениями ординат кривой лемнискаты Бернулли равны фокусному расстоянию $r_E = r_G = r_K = r_I = a$;

- абсциссы модулей радиус-векторов до точек E, G, K, I с максимальными (абсолютными) значениями ординат кривой лемнискаты равны одной и той же величине $x_E = -x_G = -x_K = x_I = a\sqrt{3}/2$;

- модули максимальных значений ординат кривой лемнискаты равны половине фокусного расстояния $y_E = y_G = -y_K = -y_I = a/2$;

- полярные углы точек E и I равны $\theta_E = -\theta_I = \pi/6$, а для точек G и K равны $\theta_G = -\theta_K = 5\pi/6$.

Лемниската Бернулли имеет две наклонные (под углом $\pm\pi/4$) взаимно перпендикулярные касательные, пересекающиеся в узловой точке O : $x + y = 0$ и $x - y = 0$.

Как известно [2], длина дуги лемнискаты $L(\theta)$ в I квадранте (AB), отсчитываемой от горизонтальной оси, определяется по формуле для полярных координат:

$$L(\theta) = \int_0^\theta \sqrt{r^2 + r_\theta'^2} d\theta, \quad (3)$$

в которой полярный угол θ изменяется в интервале от 0 в точке A до $\pi/4$ в узловой точке O , то есть $0 \leq \theta \leq \pi/4$.

В формуле (3) производная радиус-вектора r_θ' рассматриваемой точки находится дифференцированием уравнения (2), предварительно возведя его в квадрат, в виде [3]:

$$r = a\sqrt{2\cos 2\theta}; \quad (r^2)' = (2a^2 \cdot \cos 2\theta)'; \quad r \cdot r_\theta' = -2a^2 \sin 2\theta;$$

$$r_\theta' = -\frac{2a^2 \sin 2\theta}{r}. \quad (4)$$

Подставляя полученное значение r_θ' из формулы (4) в уравнение (3), получим:

$$L(\theta) = \int_0^\theta \sqrt{r^2 + \left(-\frac{2a^2 \sin 2\theta}{r}\right)^2} d\theta = \int_0^\theta \sqrt{r^2 + \frac{4a^4 \sin^2 2\theta}{r^2}} d\theta =$$

$$= \int_0^\theta \sqrt{2a^2 \cos 2\theta + \frac{4a^4 \sin^2 2\theta}{2a^2 \cos 2\theta}} d\theta = a\sqrt{2} \int_0^\theta \sqrt{\cos 2\theta + \frac{\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta}} d\theta = a\sqrt{2} \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

или

$$L(\theta) = a\sqrt{2} \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} = a\sqrt{2} \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1 - 2\sin^2 \theta}}. \quad (5)$$

Выполнив в (5) замену переменной в виде $2\sin^2 \theta = \sin^2 \varphi$, после преобразований [2] имеем:

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \quad ; \quad \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \varphi; \quad \cos \theta = \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi} \quad ;$$

$$(\sin \theta)' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \varphi \right)' ; \quad \cos \theta d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \varphi d\varphi ; \quad d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}} ,$$

подставляя которые в (5), получим точную формулу для определения длины дуги лемнискаты Бернулли в виде

$$L(\theta) = a \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}} = a \cdot F(\varphi, \lambda) = a \cdot F\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right). \quad (6)$$

В формуле (6) $F(\varphi, \lambda)$ – неполный эллиптический интеграл 1-го рода при модуле $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и амплитуде φ , равной

$$\varphi = \arcsin(\sqrt{2} \cdot \sin \theta). \quad (7)$$

При этом полная длина «полупетли» лемнискаты L_{AEO} будет равна

$$L_{AEO} = a \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}} = a \cdot K(\lambda) = a \cdot K\left(1/\sqrt{2}\right) = 1.854a ,$$

где $K(\lambda) = K(1/\sqrt{2}) = 1.854$ – полный эллиптический интеграл 1-го рода при модуле λ [4, 5].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Оперирование значением (неберущегося) неполного эллиптического интеграла $F(\varphi, \lambda)$ при аналитических преобразованиях и решениях практических прикладных задач связано с трудоемкими математическими подсчетами, перекрестным нелинейным интерполированием данных специальных таблиц, графиков и др. Несмотря на имеющиеся в настоящее время различные вычислительные программы, которые позволяют рассчитать отдельные, дискретные значения этих интегралов (дают результаты в *цифрах*), аналитические решения по-прежнему востребованы, поскольку дают результаты в символах (формулах) и имеют большие возможности по выявлению внутренних физических причинно-следственных связей в решаемых задачах и последующему их использованию в математических преобразованиях.

В связи с изложенным на основе анализа ранее полученных результатов по представлению эллиптических интегралов в элементарных функциях [6–8] ниже предлагается упрощенная расчетная зависимость для нахождения неполного эллиптического интеграла

$F\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ в рассматриваемой задаче в виде

$$F\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.31\pi \cdot \varphi(1 + 0.125 \cdot \varphi), \quad (8)$$

где амплитуда $\varphi(\theta)$ находится по формуле (7) в зависимости от заданной величины полярного угла θ .

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В нижеследующей таблице приводится сравнение значений неполного эллиптического интеграла $F\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ по предлагаемой формуле (8) с базовыми данными численного решения (с указанием значений полярного угла в градусах $\theta_0 = \frac{\theta}{\pi} \cdot 180^0$).

Таблица

СРАВНЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ПО ПРЕДЛАГАЕМОЙ ФОРМУЛЕ (8) С БАЗОВЫМИ ДАННЫМИ

Полярный угол		Амплитуда φ	Неполный эллиптический интеграл 1-го рода $F\left(\varphi, 1/\sqrt{2}\right)$		
θ (в рад.)	θ_0 (в град.)		базовые данные	по автору (8)	%
0	0	0	0	0	-
0,087	5	0,124	0,124	0,122	-1,23
0,174	10	0,248	0,249	0,249	-0,10
0,262	15	0,375	0,379	0,382	+0,77
0,349	20	0,505	0,516	0,523	+1,37
0,436	25	0,641	0,663	0,674	+1,69
0,524	30	0,785	0,826	0,840	+1,69
0,611	35	0,946	1,017	1,030	+1,33
0,698	40	1,141	1,263	1,270	+0,53
0,750	43	1,303	1,480	1,476	-0,27
0,768	44	1,383	1,590	1,580	-0,65
0,785	45	1,571	1,854	1,830	-1,29

Выводы

Как следует из таблицы, зависимость (8) позволяет прямым расчетом и с достаточно высокой точностью (< 1-2 %) находить значения неполного эллиптического интеграла 1-го рода $F\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. При этом длина дуги лемнискаты Бернулли $L(\theta)$ на участке AB от оси Ox выразится в окончательном виде формулой

$$L(\theta) = 0.31\pi \cdot a \cdot \varphi(1 + 0.125 \cdot \varphi). \quad (9)$$

Длина дуги между двумя произвольно расположенными точками лемнискаты находится как разность между значениями длин дуг, отсчитываемых от оси координат Ox для каждой из этих точек в отдельности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александрова Н.В.* Математические термины. Москва: Высшая школа, 1978. 190 с.
2. *Бронштейн И.И., Семендяев К.А.* Справочник по математике. Москва: Наука, 1980. 975 с.
3. *Фиктенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. Москва: Наука, 1969. 800 с.
4. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. Москва: Наука, 1977. 342 с.
5. *Милн-Томсон Л.* Эллиптические интегралы: Справочник по специальным функциям / Под редакцией Абрамовица М. и Стиган И. Москва: Наука, 1979. С. 401–441.
6. *Анахаев К.Н.* О методах расчета потенциальных (фильтрационных) потоков на основе эллиптических интегралов Якоби // Гидротехническое строительство. 2008. № 8. С. 7–9.
7. *Анахаев К.Н.* О полных эллиптических интегралах 3-го рода в задачах механики // Доклады Академии наук. 2017. Т. 473. № 2. С. 151–153.
8. *Анахаев К.Н.* Эллиптические интегралы в нелинейных задачах механики // Доклады Российской академии наук. Физика. Технические науки. 2020. Т. 491. № 2. С. 24–29.

Информация об авторе

Анахаев Кошкинбай Назирович, д-р техн. наук, профессор, гл. науч. сотр. отдела математического моделирования геофизических процессов, Институт прикладной математики и автоматизации – филиал Кабардино-Балкарского научного центра РАН;
360000, Россия, Нальчик, ул. Шортанова, 89 А;
anaha13@mail.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4357-4349>

REFERENCES

1. Aleksandrova N.V. *Matematicheskiye terminy* [Mathematical terms]. Moscow: Vysshaya shkola, 1978. 190 p. (In Russian)
2. Bronstein I.I., Semendyaev K.A. *Spravochnik po matematike* [Handbook of mathematics]. M.: Nauka, 1980. 975 p. (In Russian)
3. Fikhtengolts G.M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* [Course of differential and integral calculus]. Vol. 2. M.: Nauka, 1969. 800 p. (In Russian)
4. Yanke E., Emde F., Lesh F. Special functions. M.: Nauka, 1977. 342 p. (In Russian)
5. Milne-Thomson L. Elliptic integrals. Reference book on special functions. Eds. Abramowitz M., Stegun I. M.: Nauka, 1979. Pp. 401–441.
6. Anakhaev K.N. On methods of calculating potential (seepage) flows on the basis of Jacobi elliptic integrals. Power Technology and Engineering. 2008. Vol. 42. No. 5. Pp. 273–276. DOI: 10.1007/s10749-009-0052-0
7. Anakhaev K.N. Complete elliptic integrals of the third kind in problems of mechanics. *Doklady Physics*. 2017. Vol. 62. No. 3. Pp. 133–135. DOI: 10.1134/S1028335817030053
8. Anakhaev K.N. Elliptic integrals in nonlinear problems of mechanics. *Doklady Physics*. Physics Reports 2020. Vol. 65. No. 4. Pp. 142–146. DOI: 10.1134/S1028335820040011

LENGTH OF LEMNISCATA BERNOULLI ARC**K.N. ANAKHAEV**

Institute of Applied Mathematics and Automation –
branch of Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences
360000, Russia, Nalchik, 89 A Shortanov street

Annotation. The Bernoulli lemniscate curve can be used in applied studies of the shape of sliding and the shape of geophysical masses and natural objects, conjugations of trajectories of straight and rounded paths, movements of rod-hinge structures, equal gravitational movements along the lemniscate curve and its chord (tautochronicity), etc. The exact determination of the length of the lemniscate arc is due to the need to use an incomplete elliptical integral of the 1st kind (ungraspable), which makes it difficult to carry out analytical calculations, etc. The proposed elementary dependence for determining the length of the Bernoulli lemniscate arc gives a very close coincidence (< 1-2%) with the basic data of the numerical solution and is recommended for use in solving applied problems in various fields of science and technology.

Keywords: 4-order curves, Bernoulli lemniscate, length of lemniscate arc, elliptic integrals of 1 genus, tautochronicity of curve

The article was submitted 19.08.2021

Accepted for publication 28.12.2022

For citation. Anakhaev K.N. Length of lemniscata Bernoulli arc. News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS. 2022. No. 1 (105). Pp. 5–11. DOI: 10.35330/1991-6639-2022-1-105-5-11

Information about the author

Anakhaev Koshkinbai Nazirovich, Doctor of Technical Sciences, Professor, Chief Researcher of the Department of Mathematical Modeling of Geophysical Processes, Institute of Applied Mathematics and Automation – branch of Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences;

360000, Russia, Nalchik, 89 A Shortanov street;

anaha13@ mail.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4357-4349>