УДК 330.45 Научная статья
DOI: 10.35330/1991-6639-2021-6-104-185-203

ПОСТРОЕНИЕ ПОТОКОВОЙ СЕТИ ШТЕЙНЕРА 2-ГО РАНГА ОПТИМАЛЬНОСТИ

М.А. БАГОВ

Институт прикладной математики и автоматизации –
филиал Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук
360000, Россия, Нальчик, ул. Шортанова, 89 А

Аннотация. Существующие методы синтеза оптимальных потоковых сетей настроены на проектирование терминальных сетей. Дополнительный выигрыш в стоимости и эксплуатации сетей на планируемый срок обеспечивает соединение задачи синтеза терминальной потоковой сети и потоковой сети Штейнера.

Ключевые слова: потоковая сеть Штейнера, потоковая сеть, снижение стоимости, плотный базовый граф, компьютерное проектирование

Статья поступила в редакцию 26.10.2021 *Принята к публикации 26.11.2021*

Для цитирования. Багов М.А. Построение потоковой сети Штейнера 2-го ранга оптимальности // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2021. № 6 (104). С. 185–203. DOI: 10.35330/1991-6639-2021-6-104-185-203

1. Алгоритм построения плотного базового графа сети

В связи с экспоненциальным ростом количества операций (переборов) вариантов даже при условии рассмотрения только связных контуров (фрагментов) снизить существенно размерность задачи (количество переборов) при построении Р-оптимальной сети можно только за счет динамически изменяющегося количества дуг возможных соединений вершин сети в ходе оптимизации сети.

Важнейшими фазами избыточного графа возможных соединений являются плотный и неплотный базовые графы (ПБГ и НБГ).

Основой подхода является построение 4-вершинных ячеек, вершины которых расположены друг к другу на минимальном расстоянии.

1. Для каждой текущей вершины i определяем ближайшую к ней вершину $j \in B$. Определяем для вершины i, j ближайшую к ним вершину k, такую, что

$$l_{ik} + l_{jk} \le l_{ip} + l_{jp}, \forall p \in B, p \ne i, j.$$

Определяем ближайшую к вершинам i, j, k вершину r, т.е. такую вершину r, что:

$$l_{ir} + l_{jr} + l_{kr} \le l_{ip} + l_{jp} + l_{kp}, \forall p \in B, p \ne i, j, k.$$

2. Выпуклый четырехугольник, образованный данными вершинами базового графа, дополняем диагоналями. Полученную конструкцию назовем i-ячейкой базового графа возможных соединений вершин сети друг с другом.

3. Выявляем все вершины базового графа, у которых количество 1-достижимых вершин равно 4. Такие вершины назовем узловыми вершинами базового графа.

4. Осуществляем поиск всех ребер, соединяющих между собой узловые вершины.

5. Для каждого i-го ребра осуществляем поиск связных с ним i-ячеек.

6. Находим количество i-ячеек, принадлежащих i-му ребру. В случае если i-е ребро связано только с одной i-ячейкой, определяем, с какой стороны от ребра находится связная с ним i-ячейка. Далее определяем, есть ли такая вершина в формируемом базовом графе, находящаяся с противоположной стороны от ребра и имеющая с каждой из его вершин по одному общему ребру. В случае если такая вершина существует, переходим к проверке следующего ребра. Отсутствие такой вершины означает наличие «провала».

Рассмотрим процедуру определения «провала».

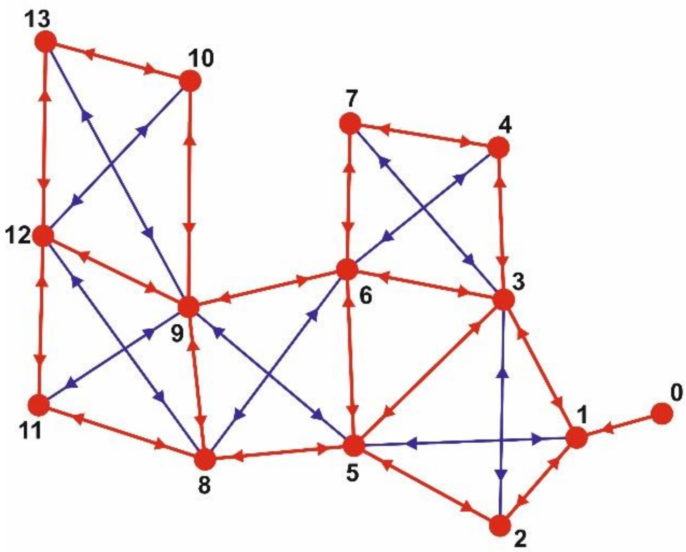


Рис. 1. *Граф, содержащий незаполненные ячейки, – «провалы»*

Рассмотрим ребро {6-9}. Ребру {6-9} принадлежит только одна i-ячейка {5-8-9-6}. С противоположной стороны от ребра {6-9} нет ни одной вершины, которая бы имела одновременно по одному общему ребру с вершинами 9 и 6. В данном случае предполагаем наличие «провала» и осуществляем поиск вершин (из рисунка 1 видно, что такими вершинами являются вершины 10 и 7), которые его образуют.

Для этого:

a. Находим все вершины и ребра базового графа, связные с первой вершиной i-го ребра и записываем в отдельный список. В нашем случае это ребра {6-7},{6-4},{6-3},{6-5},{6-8}.

b. Находим все углы между найденными ребрами и i-м ребром:

$$\alpha = \frac{argcos\left(\frac{\left((x_v - x_{is}) * (x_v - x_{st})\right) + \left((y_v - y_{is}) * (y_v - y_{st})\right)}{|l1| * |l2|}\right) * 180}{\pi},$$

где $l1, l2$ – длины ребер, $(x_v, y_v), (x_{is}, y_{is}), (x_{st}, y_{st})$ – соответствующие координаты вершин.

Записываем (ребра {6-8}, {6-7}) с наибольшим и наименьшим углами (выбираем направление по часовой стрелке относительно i-го ребра). Остальные ребра удаляем из списка.

c. Определяем, какое из двух ребер, полученных на шаге (b), принадлежит i-ячейке i-го ребра и удаляем его (в нашем случае это ребро {6-8}). Выделяем из оставшегося ребра {6-7} вершину 7 и сохраняем результат.

d. Повторяем шаги (a) – (c) для второй вершины i-го ребра.

e. В результате выполнения шагов (a) – (d) получаем номера вершин, образующих «провал». Добавляем ребра и диагонали, которых не хватает в «провале».

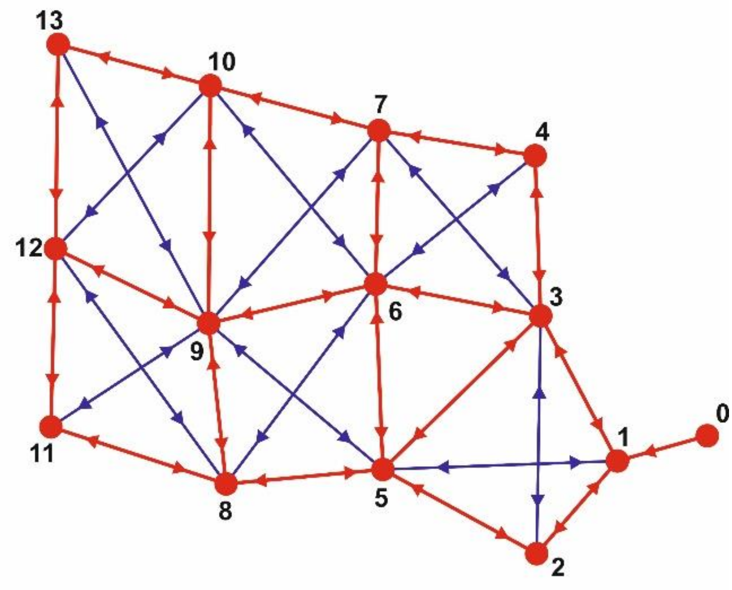


Рис. 2. *Граф после устранения «провалов»*

2. Процесс оптимизации сети на динамическом базовом графе (ДБГ)

Основными фазами ДБГ являются ПБГ и НБГ. Ячейки НБГ отличаются от ячеек ПБГ тем, что в них удалены диагональные связи между вершинами ячеек (см. рис. 3).

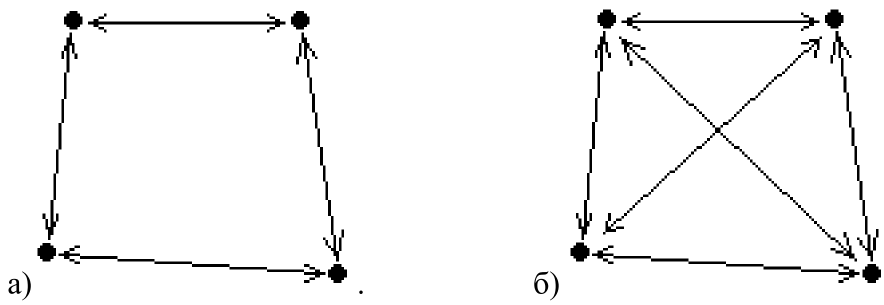


Рис. 3. *Ячейка НБГ (а) и ячейка ПБГ (б)*

Отметим, что вершины ячеек соответствуют узлам отбора потока потоковой сети.

Процесс построения P-оптимальной потоковой сети на ДБГ состоит из следующих фаз:

1. Проводится ранговая оптимизация сети на ПБГ за время $T/2$, *где* T *– заданное время построения сети, и определяется достигнутый ранг* P.

2. Переносится полученное остовное дерево Д ранга P на НБГ, т.е. дополняется НБГ всеми дугами этого дерева.

3. Продолжаем решать задачу синтеза сети на полученном графе Д ∪ НБГ*, стартуя с найденного на шаге 2 решения.*

4. После достижения на этом ДБГ экстремума (P+1)-го ранга либо истечения времени решения задачи найденное решение переносим на ПБГ в качестве начального и продолжаем решение до истечения заданного времени.

Проведенный обширный вычислительный эксперимент показал эффективность представленного метода [1], позволив получить решения по крайней мере 4-го ранга оптимальности на ПБГ для больших сетей. Ниже приведено полученное в 2021 году решение для сети на симметричном ПБГ, содержащем 100 вершин.

Это решение в статье рассматривается как начальное при построении потоковой сети Штейнера 2-го ранга оптимальности [2, 10–15].

Ниже представлена потоковая сеть Штейнера, полученная преобразованием терминальной потоковой сети (см. рис. 4) в сеть Штейнера, оптимизацией ее структуры и координат точек Штейнера.

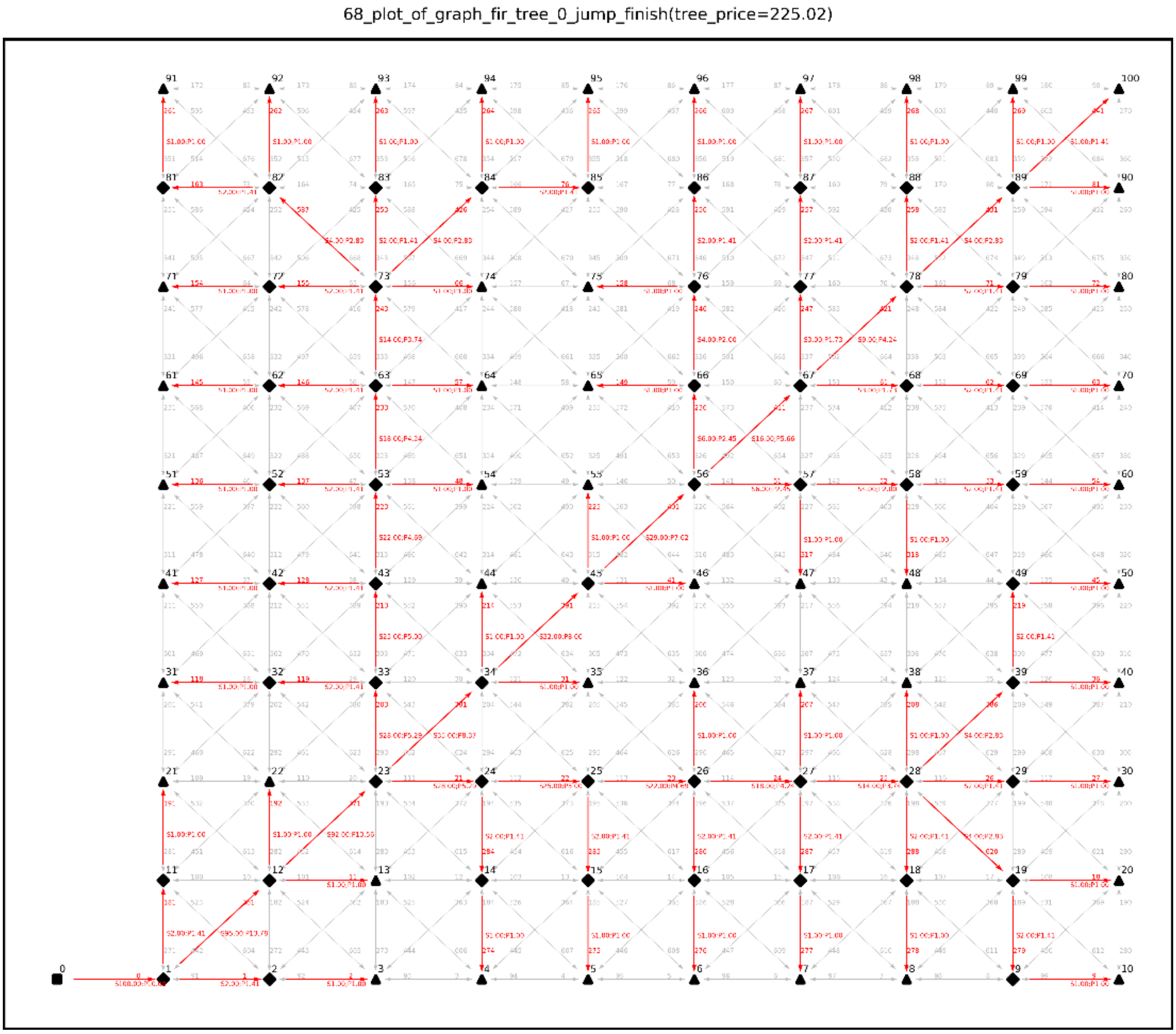


***Рис. 4.** Сеть 4-го ранга оптимальности на симметричном плотном базовом графе*

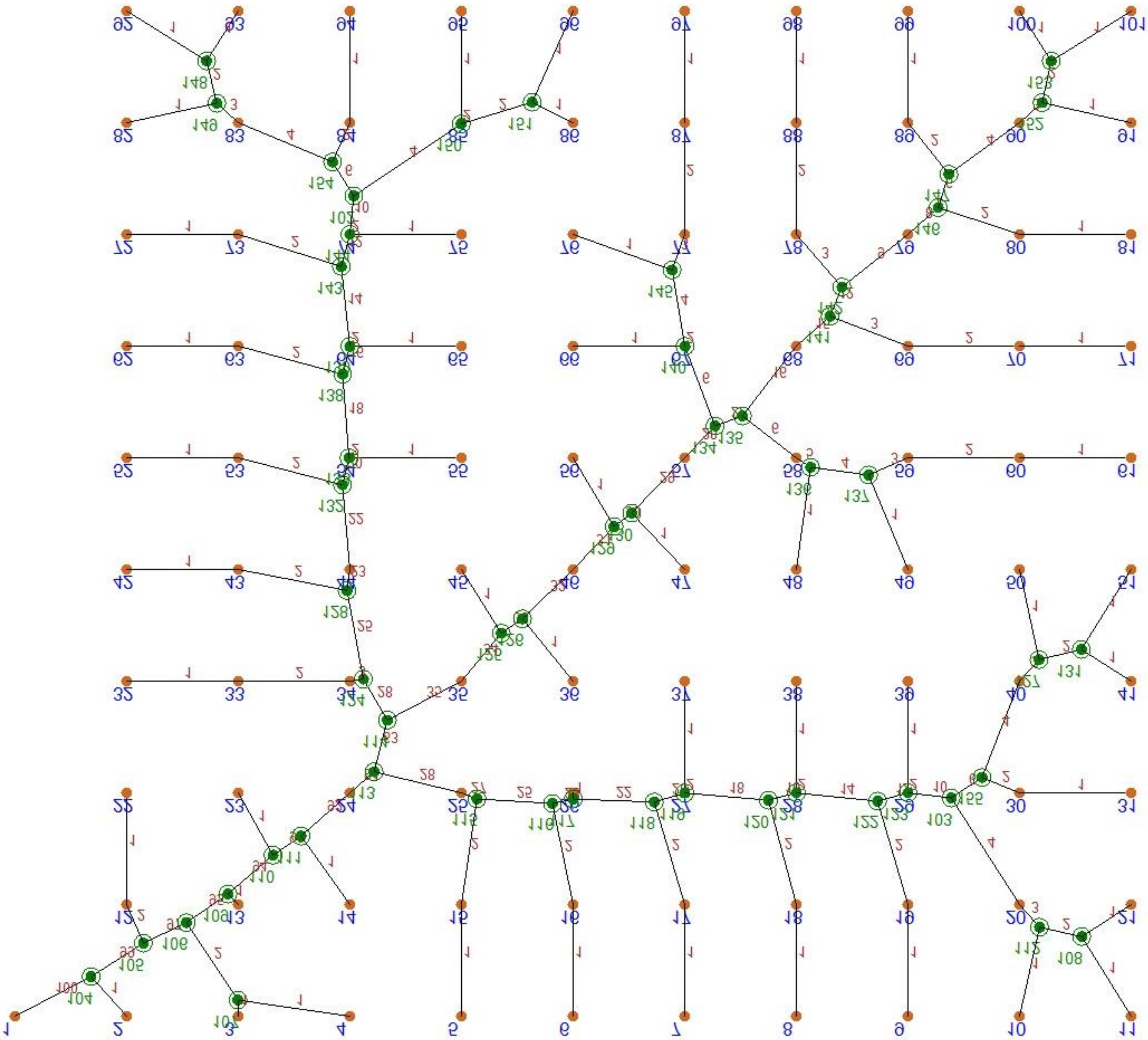


Рис. 5. *2-оптимальная потоковая сеть Штейнера*

3. Компьютерное проектирование потоковой сети Штейнера. Сетевая задача Штейнера

Задача Штейнера является одной из наиболее сложных задач структурно-параметрической оптимизации. Формулировка задачи Штейнера состоит в следующем [3, 4]. Впервые конечная процедура построения минимального дерева Штейнера была предложена в работе [5]. Задача Штейнера решена для небольшого количества точек. В основе разработанных к настоящему времени алгоритмов решения классической задачи Штейнера лежат процедура перебора структур и методы редукции. В работе [6] представлен метод двухуровневой схемы решения – на верхнем уровне осуществляется синтез топологии сети, на нижнем – определяется оптимальное распределение точек Штейнера. Обзоры сфер приложения задачи Штейнера даны в работах [7–8].

В сетевой задаче Штейнера (СЗШ) в отличие от ЗШ, следует минимизировать не суммарную длину коммуникаций, а их общую стоимость. В СЗШ величины весов ребер зависят от потока по ним. В работе E.N. Gilbert [9] впервые дана формула вычисления углов, образуемых смежными ребрами, инцидентными точке Штейнера в случае, когда эти дуги имеют различные веса. В работах [10–15] был представлен подход к решению СЗШ, основанный на динамической декомпозиции и ранговой оптимизации.

Задача 1 *(СЗШ): На плоскости задан полный двухзвенный ориентированный геометрический граф Г(B,*$\mathcal{D}$*),* n *вершин которого* $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$ *фиксированы, а* $(n-2)$ *вершины* $(x_i, y_i), i = n+1, \dots, 2n-2$ *не фиксированы. Следует так определить координаты нефиксированных вершин и так приписать каждой дуге* $ij \in \mathcal{D}$ *поток* v_{ij}*, что*

$$\begin{cases} \mathrm{C} = \sum\limits_{ij \in \mathcal{D}} f_{ij}(v_{ij}) \sqrt{\left(x_i - x_j\right)^2 + \left(y_i - y_j\right)^2} \to min & (1) \\ \sum\limits_{ij \in \Gamma_j^+} v_{ij} - \sum\limits_{k \in \Gamma_j^-} v_{jk} = q_j, \forall_j \in \mathrm{B}\,; \quad \sum\limits_{j \in \Gamma_1} v_{1j} = \sum\limits_{j \in B_\Phi} q_j & (2),(3) \\ v_{ij} \geq 0, \forall_{ij} \in \mathcal{D}\,; \ \ x_i = a_i, y_i = b_i, \forall_i \in B_\Phi, & (4),(5) \end{cases}$$

где $|B_\Phi| = n$, $|B_Ш| = n-2$, $f_{ij}(v_{ij})$ *– вогнутая непрерывно возрастающая функция,* $f_{ij}(0) = 0$; $q_j > 0, j \in B_\Phi$ *и* $q_j = 0, j \in B_Ш$*;*
q_j *– поток, потребляемый в* j*-м узле (вершине) сети. Целевая функция (1) отражает общую стоимость коммуникаций сети, уравнение (2) есть уравнение неразрывности потока в сети, уравнение (3) – соотношение между источниками и стоками.*

Подчеркнем, что оптимизация структуры потоковой сети не влияет на перераспределение воды, поступающей потребителям, в связи с условиями (2), (3) неразрывности потоков, включенных в постановку сетевой задачи Штейнера.

Отметим, что в отличие от классической задачи Штейнера целевой функцией (1) потоковой задачи Штейнера является построение сети минимальной стоимости, а не минимальной длины. Но вторичным фактором потоковой сети Штейнера является некоторое сокращение ее длины в сравнении с длиной оптимальной терминальной потоковой сети.

4. Построение потоковой сети Штейнера

4.1. Построение терминальной потоковой сети высокого ранга оптимальности

Удельная стоимость любого участка трубопроводной потоковой сети может быть выражена эмпирической формулой [16, 17]

$$c_i = a + b d_i^{\alpha}, \tag{6}$$

где a, b, α – числовые коэффициенты; a>0, b>0, 1<α≤2, di – диаметр труб на *i-м* участке трубопровода. Пользуясь известными формулами гидравлики типа Дарси-Вейсбаха для удельных потерь напора h_i при движении потока q_iпо трубе диаметром d_i

$$h_i = \frac{k q_i^{\beta}}{d_i^{\gamma}}, \ \beta>1, \ \gamma>4, \tag{7}$$

получим:

$$c_i = a + b\left(\frac{q_i^{\beta}}{h_i}\right)^{\frac{\alpha}{\gamma}}, \tag{8}$$

где β, γ – положительные числовые коэффициенты.

Поскольку должен выполняться закон сохранения энергии для сети, то

$$\sum_{i=1}^{n} h_i l_i = HQ,$$

где l_i, H, Q – соответственно: длина i-й ветви, напор на насосной станции, поток, подаваемый насосной станцией в сеть. Тогда удельная стоимость любой ветви примет вид:

$$C_i(q_i, h_i) = a + bk^{\frac{\alpha}{\gamma}} q_i^{\frac{\beta\alpha}{\gamma}} \quad h_i^{-\frac{\alpha}{\gamma}}. \tag{9}$$

Для увеличения надежности работы сети используем формализацию инженерного подхода к проектированию сетей, состоящего в том, что давление в сети распределяется равномерно по ветвям, т. е. $h_i(q_i) = h$, где h определяется соотношением (7). Тогда получим:

$$h = \frac{HQ}{\sum_i q_i l_i}, \quad C_j(q_j) = \begin{cases} a + bk^{\frac{\alpha}{\gamma}} q_j^{\frac{\beta\alpha}{\gamma}} \quad \left(\frac{HQ}{\sum_i q_i l_i}\right)^{-\frac{\alpha}{\gamma}} \\ 0, q_j = 0 \end{cases}. \tag{10}$$

Функция $C_j(q_j)$ при $q_j > 0$ строго вогнута, положительна и возрастает по q_j. Параметр a включают в стоимость труб сети потому, что сортаменты труб дискретны.

Для больших потоковых сетей его значение мало в сравнении с $bk^{\frac{\alpha}{\gamma}} q_j^{\frac{\beta\alpha}{\gamma}} \quad \left(\frac{HQ}{\sum_i q_i l_i}\right)^{-\frac{\alpha}{\gamma}}$ и поэтому положим $a = 0$.

Коэффициенты α, β, γ, k в формулах (6–10) известны для каждого вида труб. Ниже представлена соответствующая таблица [16, 17].

Таблица 1

Материал труб	Коэффициенты			
	α	β	γ	k
Сталь	1.4	2	5.3	0.001735
Чугун	1.6	2	5.3	0.001735
Асбестоцемент	1.95	1.85	4.89	0.001180
Пластмасса	1.95	1.774	4.774	0.001052

Поскольку H, Q заданы, $q_i, l_i \ (i = \overline{1,n})$ известны для заданной структуры сети, а α, β, γ, k – известные коэффициенты (см. таблицу 1), то величина $k^{\frac{\alpha}{\gamma}} \left(\frac{HQ}{\sum_i q_i l_i}\right)^{-\frac{\alpha}{\gamma}}$ едина для всех ветвей заданной сети. Обозначив ее E, получим $C_j(q_j) = Eq_j^{\frac{\beta\alpha}{\gamma}}$.

Суть метода решения задачи синтеза потоковой сети при этом состоит в следующем:

1. Стартуем с начального островного дерева базового графа сети, которое определяется специальным методом и алгоритмом [18].

2. Последовательно варьируется его структура и, соответственно, потоки по ветвям остовного дерева до тех пор, пока не будет построена потоковая сеть достижимого ранга оптимальности за заданное время решения задачи синтеза потоковой сети.

Понятие и определение ранга экстремума потоковой сети было введено в работе [19] потому, что локальный экстремум сетевой задачи с вогнутой целевой функцией по потокам достигается почти в каждой угловой точке транспортного многогранника и поэтому он не информативен, а глобальный, вообще говоря, не достижим за экономически оправданное время решения задачи на компьютере для больших сетей.

Сеть имеет P-й ранг экстремума в том случае, если никакое перераспределение потоков и структуры сети, связанное с включением любых P-хорд базового графа сети и обнулением потока по соответствующим P-дугам текущего остовного дерева, не приведет к уменьшению стоимости сети.

4.2. Преобразование терминальной потоковой сети в потоковую сеть Штейнера

Поскольку задача синтеза потоковой сети Штейнера является существенно многоэкстремальной задачей большой размерности, для ее решения следует стартовать с оптимального решения более простой задачи – задачи синтеза терминальной сети.

Преобразование терминального остовного дерева в сеть Штейнера осуществляется путем развертывания его узлов в структуры Штейнера. Каждый такой узел содержит вершину, из которой поступает поток в узел (исток), и вершины, в которые доставляется поток из узла (стоки).

Развертывание элементарных узловых структур в узловые структуры Штейнера осуществляется в соответствии с фундаментальными свойствами точек Штейнера:

1. Степени точек Штейнера равны 3, а степени фиксированных (терминальных) точек не превосходят 3.

2. Дуги остовного дерева, инцидентные каждой точке Штейнера, образуют смежные друг с другом углы, которые определяются по формуле

$$cos\left(\alpha_{i,j}\right) = \frac{f_k^2(v_k) - f_i^2(v_i) - f_j^2(v_j)}{2f_i(v_i)f_j(v_j)},$$

где $cos\left(\alpha_{i,j}\right)$ – косинус угла между отрезками, соединяющими точку (x, y) с точками (x_i, y_i) и $\left(x_j, y_j\right)$ (см. рис. 1).

3. Число точек Штейнера не превосходит $(n-2)$, где n – количество терминальных точек.

4. Ребра дерева пересекаются только в вершинах дерева.

На рисунке 6 представлено развертывание элементарного узла типа «исток-4 стока» в узловые структура Штейнера

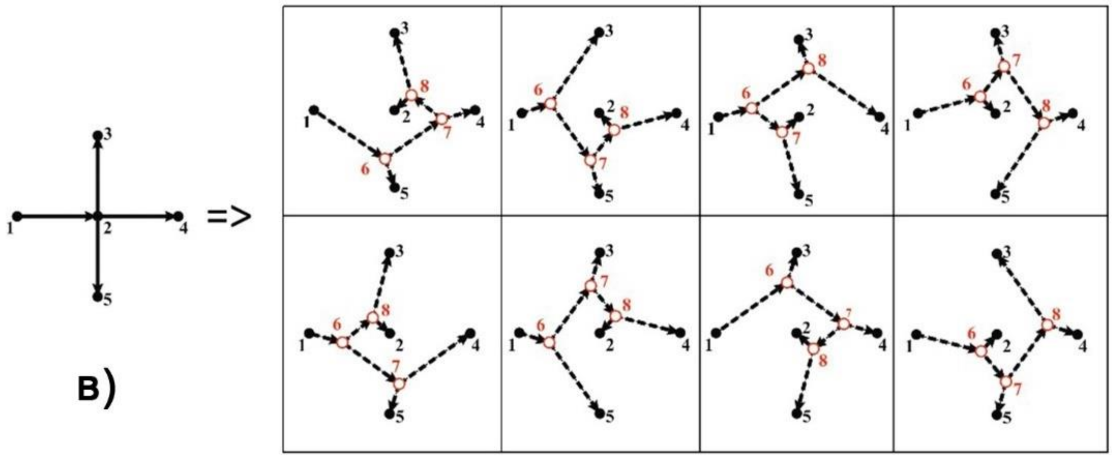


Рис. 6. *Узловая структура «исток-4 стока» терминальной потоковой сети и соответствующие ей узловые структуры Штейнера*

Оптимизация параметров на каждой из альтернативных узловых структур формируемой сети Штейнера проводится на основе последовательного решения на каждой из элементарных структур Штейнера определением оптимальных координат точек Штейнера градиентным методом [12].

4.3. Р-ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ СЕТЕВОЙ ЗАДАЧИ ШТЕЙНЕРА

Пусть $\{v_{ij}^*\}_{ij\in D}, \{x_i^*, y_i^*\}_{i\in B_{\text{ш}}}$ – любое допустимое решение задачи (1) – (5), где $B^* = B_{\text{ф}} \cup B_{\text{Ш}}^*$ $B_{\text{ш}}^*$ содержит все те вершины (точки) Штейнера, поток по которым отличен от нуля, D^* содержит все те дуги, поток по которым отличен от нуля. Построим граф $\Gamma^*(B^*, D^*)$. Выделим любую вершину k графа Γ^* и построим множество ${B^*}_k^p$ вершин Р-достижимых из k и множество ${B^*}_{k\text{ш}}^{p-1}$ (Р-1)-достижимых из k вершин (точек) Штейнера (без учета направления дуг).

Полный граф P_k^*, построенный на множестве вершин ${B^*}_k^p \backslash {B^*}_k^{p-1}$, дополненном $\left[\left|{B^*}_k^p \backslash {B^*}_k^{p-1}\right| - 2\right]$ вершинами (точками) Штейнера, назовем P_k^*-подграфом графа $\Gamma(B, D)$.

Определение 1. *Назовем сеть Штейнера* $\left\{\Gamma^*(B^*, D^*), \{v_{ij}^*\}_{ij\in D^*}, \{x_i^*, y_i^*\}_{B_{\text{ш}}}\right\}$ *сетью Р-го ранга (или Р-оптимальной), если она оптимальна на любом подграфе* P_k^*, *т.е. если* $\forall k \in B^*$ *выполнено условие минимума:*

$$min \sum_{ij\in\Gamma} f_{ij}(v_{ij}) \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} = \sum_{ij\in\Gamma^*} f_i(v_{ij}{}^*) \sqrt{(x_i{}^* - x_j{}^*)^2 + (y_i{}^* - y_j{}^*)^2}, \quad (11)$$

где $v_{ij} = v_{ij}^*, \forall ij \notin P_i{}^*; \quad x_i = x_i^*, y_i = y_i^* \; \forall i \notin P_i{}^*.$

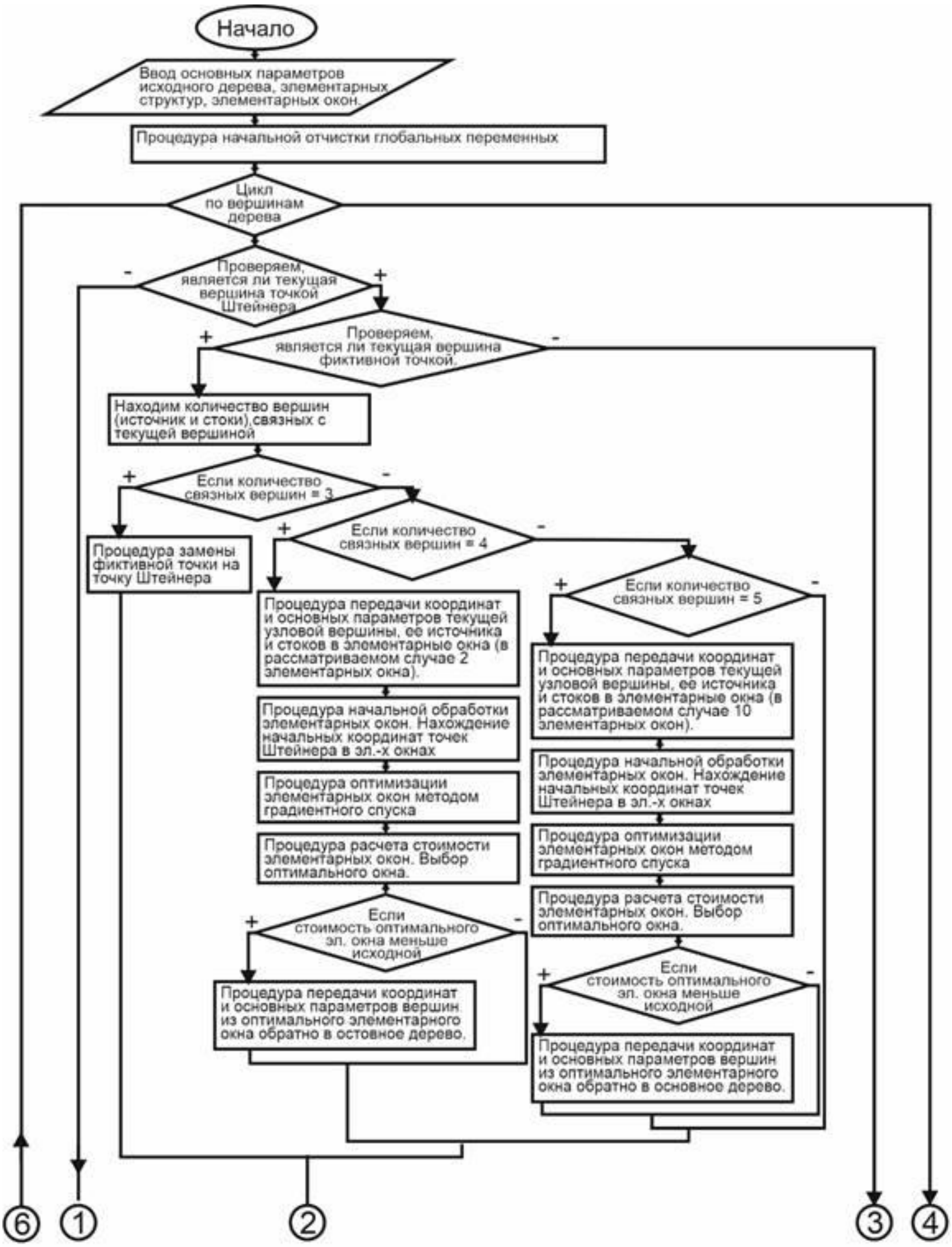
Метод динамической декомпозиции построения Р-оптимальной сети Штейнера состоит из следующих этапов:

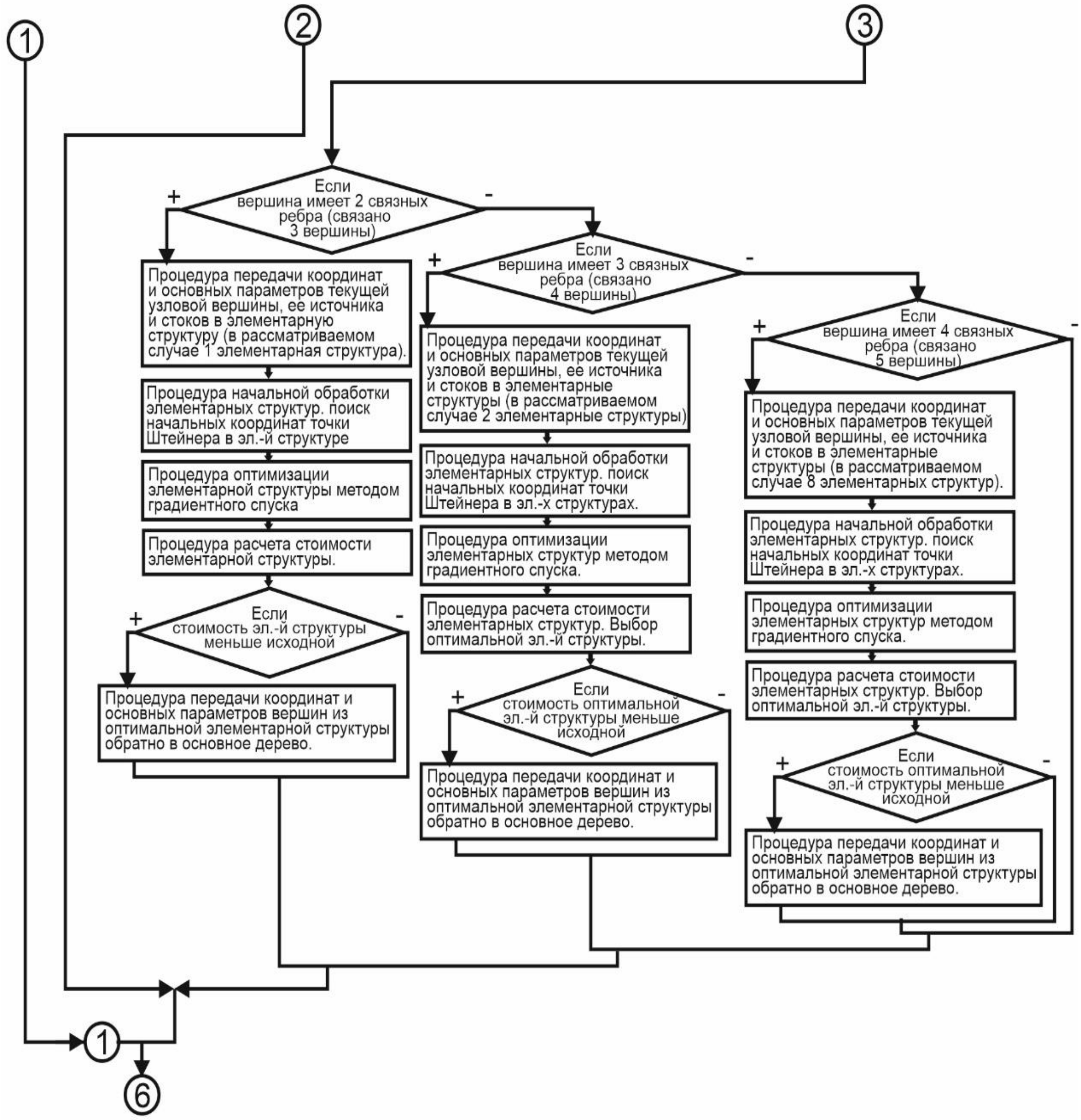
1. Преобразование терминального сетевого остовного дерева в сеть Штейнера на основе развертывания узлов терминальной сети в альтернативные элементарные узловые структуры Штейнера с оптимизацией координат точек Штейнера и выделением из альтернативных структур (рис. 6) наилучшей.
2. Глобальное решение сетевых задач Штейнера на каждом из множеств вершин, Р-достижимых из каждой вершины Штейнера.

3. Удаление из сети Штейнера P-го ранга тех точек Штейнера, которые достаточно близки к узлам сети (ε-близки к узлам сети)

4.4. Блок-схема алгоритма построения сети Штейнера 2-го ранга оптимальности

Ниже представлена блок-схема алгоритма построения 2-оптимальной потоковой сети Штейнера.




1
2
3
Если вершина имеет 2 связных ребра (связано 3 вершины)
Процедура передачи координат и основных параметров текущей узловой вершины, ее источника и стоков в элементарную структуру (в рассматриваемом случае 1 элементарная структура).
Процедура начальной обработки элементарных структур. поиск начальных координат точки Штейнера в эл.-й структуре
Процедура оптимизации элементарной структуры методом градиентного спуска
Процедура расчета стоимости элементарной структуры.
Если стоимость эл.-й структуры меньше исходной
Процедура передачи координат и основных параметров вершин из оптимальной элементарной структуры обратно в основное дерево.
Если вершина имеет 3 связных ребра (связано 4 вершины)
Процедура передачи координат и основных параметров текущей узловой вершины, ее источника и стоков в элементарные структуры (в рассматриваемом случае 2 элементарные структуры)
Процедура начальной обработки элементарных структур. поиск начальных координат точки Штейнера в эл.-х структурах.
Процедура оптимизации элементарных структур методом градиентного спуска.
Процедура расчета стоимости элементарных структур. Выбор оптимальной эл.-й структуры.
Если стоимость оптимальной эл.-й структуры меньше исходной
Процедура передачи координат и основных параметров вершин из оптимальной элементарной структуры обратно в основное дерево.
Если вершина имеет 4 связных ребра (связано 5 вершины)
Процедура передачи координат и основных параметров текущей узловой вершины, ее источника и стоков в элементарные структуры (в рассматриваемом случае 8 элементарных структур).
Процедура начальной обработки элементарных структур. поиск начальных координат точки Штейнера в эл.-х структурах.
Процедура оптимизации элементарных структур методом градиентного спуска.
Процедура расчета стоимости элементарных структур. Выбор оптимальной эл.-й структуры.
Если стоимость оптимальной эл.-й структуры меньше исходной
Процедура передачи координат и основных параметров вершин из оптимальной элементарной структуры обратно в основное дерево.
1
6

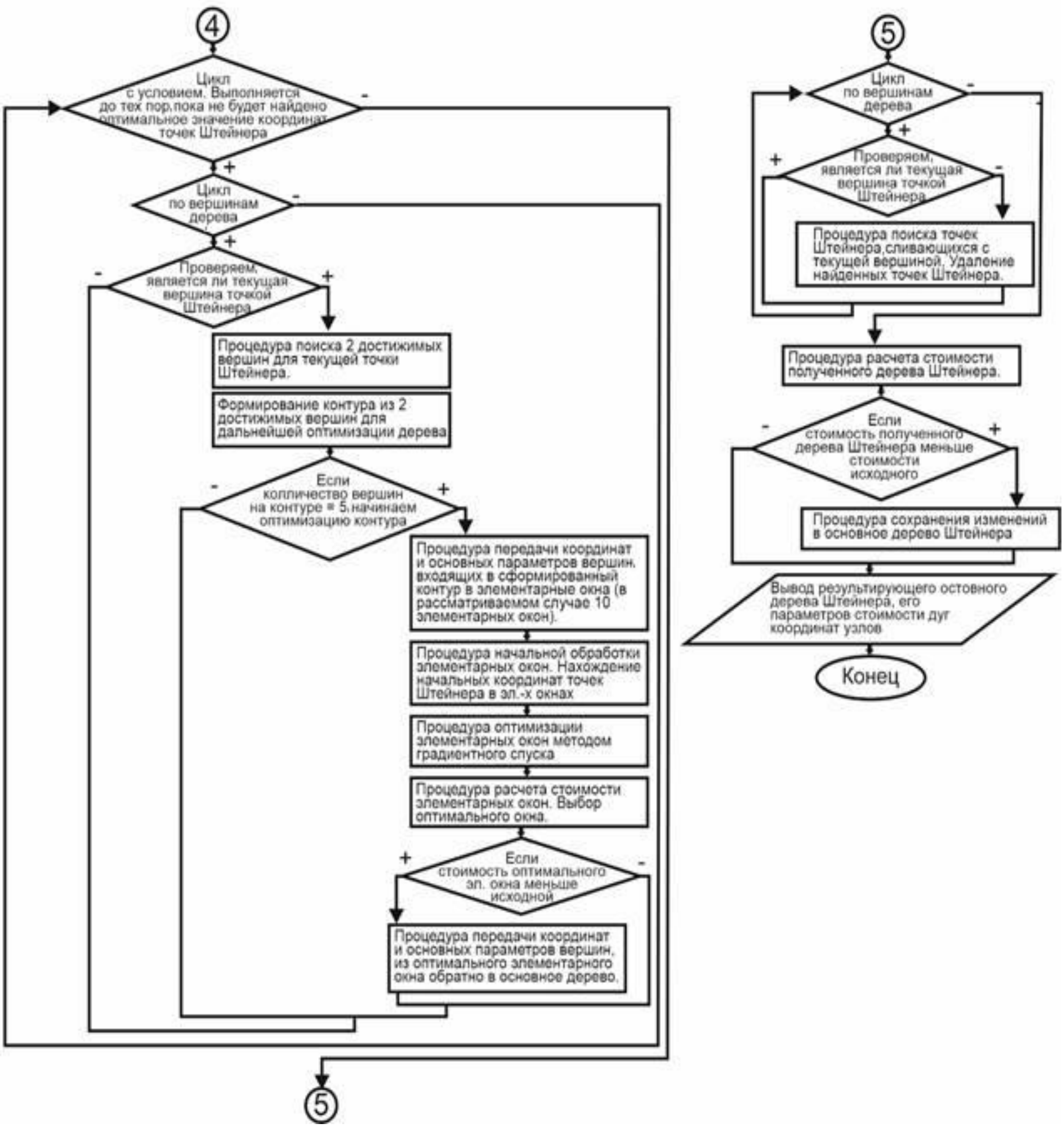


Рис. 7. *Блок-схема алгоритма построения сети Штейнера 2-го ранга оптимальности*

5. Применение к существующим системам водоснабжения

5.1. Применение к проектированию больших трубопроводных оросительных сетей

Рассмотрим крупнейшую на Юге России Лево-Егорлыкскую трубопроводную оросительную сеть (ЛЕОС) (Ставропольский край) площадью 46 тысяч гектаров, в проектировании которой принимал участие ИПМА КБНЦ РАН. Часть схемы сети и ее подсетей представлена на рис. 8.

С использованием изложенного выше метода (6) – (10) была, в частности, спроектирована трубопроводная оросительная сеть Новоселитского района Ставропольского края, являющаяся подсетью Лево-Егорлыкской оросительной сети.

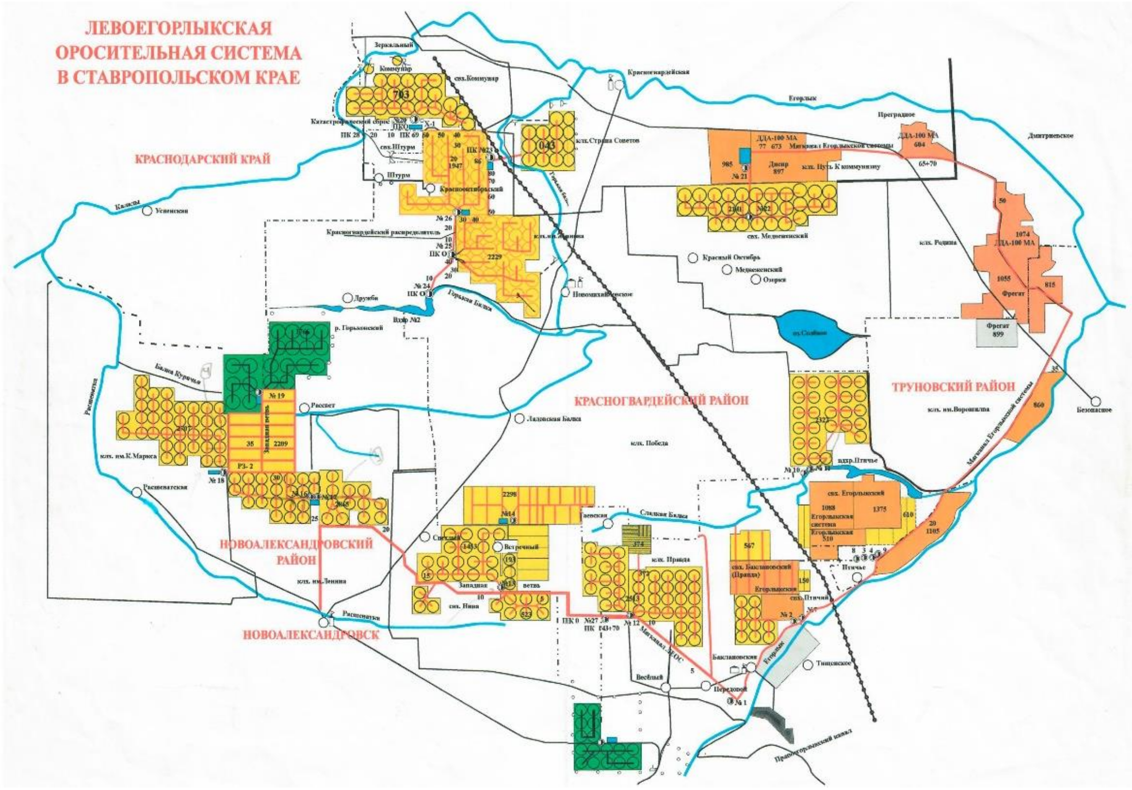


Рис. 8. *Схема части ЛЕОС*

Ниже представлена схема этой сети (рис. 9) и таблицы результатов расчета сети (табл. 2, 3).

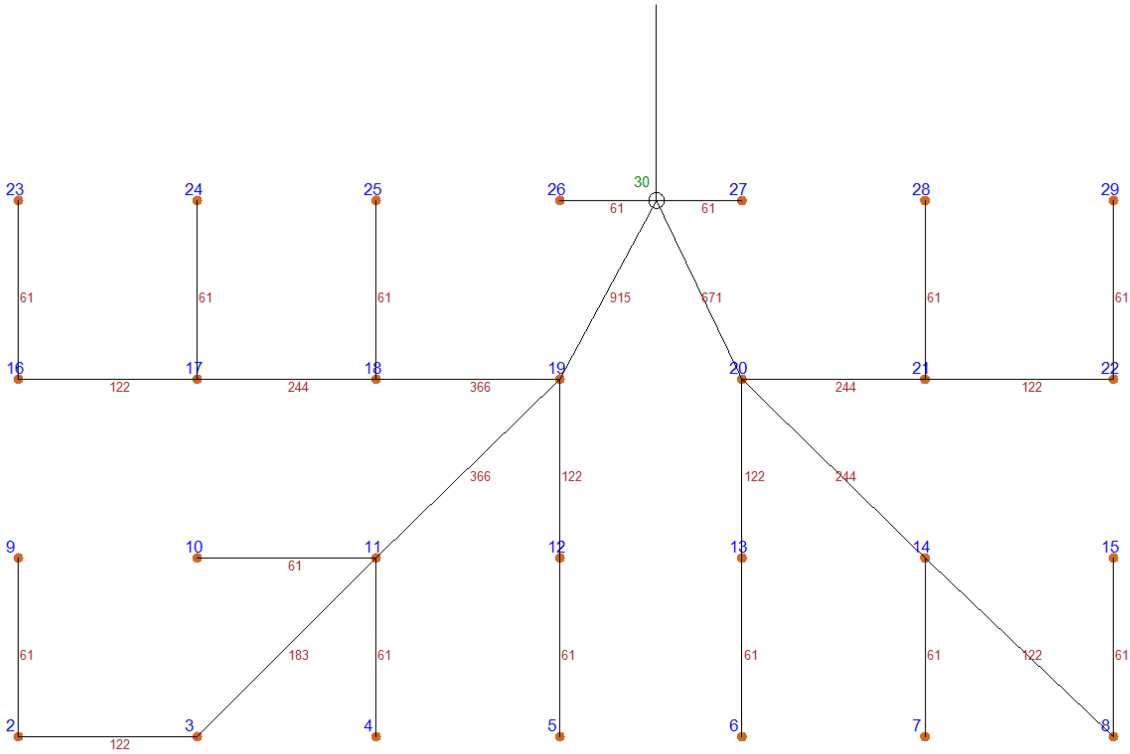


Рис. 9. *Схема сети (общая длина сети – 23,56 км, площадь орошения – 93,3 га)*

Таблица 2

a	0
b	1
k	0,001735
α	1,4
β	2
γ	5,3
H	140,62
Q	1708
Общая длина сети (м)	23585,80264
E	0,476571731
Общая стоимость (руб.) в ценах 1992 года	205994,6564

Результаты гидравлического расчета сети

Таблица 3

Ветви сети (нач.-кон.)	Длина ветвей (м)	Поток по ветвям (л./сек.)	Удельная стоимость (руб.)	Стоимость ветвей (руб.)
1→30	2635	1708	24,31407301	64067,58238
30→26	389	61	4,181396949	1626,563413
30→27	344	61	4,181396949	1438,40055
30→19	818,3648331	915	17,48447632	14308,68054
30→20	797,9573923	671	14,84195527	11843,24793
20→21	737	244	8,697427702	6410,004217
20→14	1030,324706	244	8,697427702	8961,174641
20→13	720	122	6,030538753	4341,987902
21→22	758	122	6,030538753	4571,148375
21→28	720	61	4,181396949	3010,605803
22→29	720	61	4,181396949	3010,605803
13→ 6	720	61	4,181396949	3010,605803
14→ 7	720	61	4,181396949	3010,605803
14→ 8	1045,449186	122	6,030538753	6304,621829
8→15	720	61	4,181396949	3010,605803
19→12	720	122	6,030538753	4341,987902
19→11	1032,47276	366	10,77507177	11124,96809
19→18	740	366	10,77507177	7973,553113
12→ 5	720	61	4,181396949	3010,605803
11→ 4	720	61	4,181396949	3010,605803
11→ 3	1018,233765	183	7,471115614	7607,34218
11→10	720	61	4,181396949	3010,605803
3→ 2	720	122	6,030538753	4341,987902
2→ 9	720	61	4,181396949	3010,605803
18→17	720	244	8,697427702	6262,147946
18→25	720	61	4,181396949	3010,605803
17→24	720	61	4,181396949	3010,605803
17→16	720	122	6,030538753	4341,987902
16→23	720	61	4,181396949	3010,605803

Ниже представлена потоковая сеть Штейнера 2-го ранга оптимальности, полученная преобразованием терминальной потоковой сети (см. 4.2.–4.4.) в сеть Штейнера, оптимизацией ее структуры и координат точек Штейнера (рис. 10, табл. 4, 5).

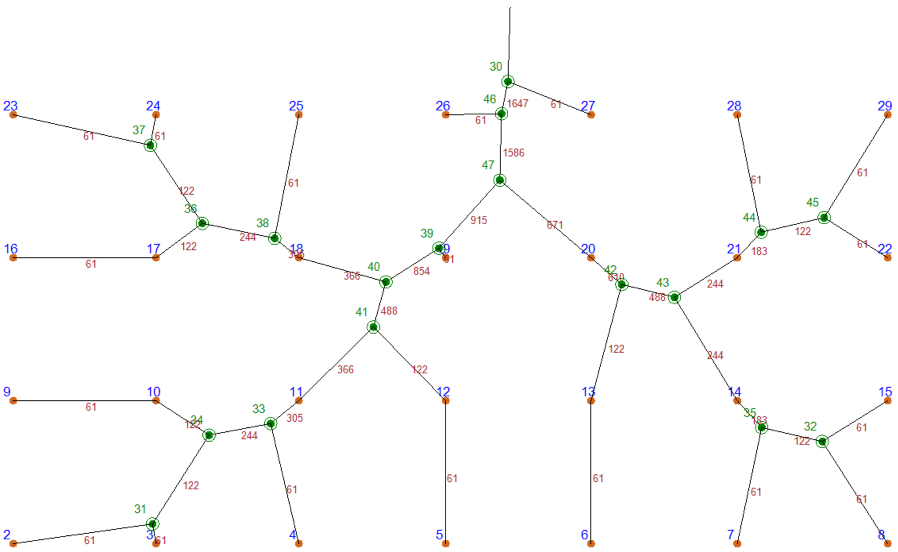


Рис. 10. *Схема потоковой сети Штейнера*

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА СЕТИ

Таблица 4

a	0
b	1
k	0,001735
α	1,4
β	2
γ	5,3
H	140,62
Q	1708
Общая длина сети (м)	21798,65881
E	0,475845429
Общая стоимость (руб.) в ценах 1992 года	195715,763

Таблица 5

Ветви сети (нач.-кон.)	Длина ветвей (м)	Поток по ветвям (л./сек.)	Удельная стоимость (руб.)	Стоимость ветвей (руб.)
1-30	2561,146692	1708	24,27701804	62177,00445
12-5	720	61	4,175024445	3006,0176
13-6	720	61	4,175024445	3006,0176
30-26	261,5683811	61	4,175024445	1092,054385
30-53	155,3208	1647	23,81503367	3698,970081
31-3	106,9050368	61	4,175024445	446,331142
31-2	720,5563732	61	4,175024445	3008,340472
32-9	721,3715381	61	4,175024445	3011,743805
32-10	4,300697618	61	4,175024445	17,95551768
33-15	379,2637558	61	4,175024445	1583,435452
33-8	609,0866905	61	4,175024445	2542,951822
34-11	0,319061123	61	4,175024445	1,332087986
34-35	174,8146321	305	9,770711605	1708,063355
35-4	632,8004913	61	4,175024445	2641,95752
35-36	320,0831756	244	8,684172708	2779,657578
36-31	518,9810287	122	6,021348133	3124,965449
36-32	313,7785048	122	6,021348133	1889,369614
37-14	0,215406592	61	4,175024445	0,899327788
37-38	177,060209	183	7,459729535	1320,82127
38-7	599,8254179	61	4,175024445	2504,285782
38-33	326,6098665	122	6,021348133	1966,63171
39-17	2,57007782	61	4,175024445	10,73013772
39-16	720,9739283	61	4,175024445	3010,083775
40-41	473,6828621	122	6,021348133	2852,209417
40-39	289,5561086	122	6,021348133	1743,518134
41-23	708,0440075	61	4,175024445	2956,101039
41-24	158,8506106	61	4,175024445	663,2051825
42-18	29,35606581	61	4,175024445	122,5622924
42-43	152,8098479	305	9,770711605	1493,060954
43-40	380,8703723	244	8,684172708	3307,544093
43-25	616,5245586	61	4,175024445	2574,005103
44-19	181,1645895	61	4,175024445	756,3665898
44-45	317,5380023	854	16,83296523	5345,106152
45-42	367,7323997	366	10,75865042	3956,304338
45-46	311,4862495	488	12,52457987	3901,23441
46-12	554,5520084	122	6,021348133	3339,1507
46-34	484,3083821	366	10,75865042	5210,504581
47-20	81,94500168	61	4,175024445	342,1223851
47-48	224,5571219	610	14,09161955	3164,373529
48-50	471,0030323	244	8,684172708	4090,271678
48-49	303,2735653	366	10,75865042	3262,814272
49-13	467,7170317	122	6,021348133	2816,287075
49-37	563,8917471	244	8,684172708	4896,933321
50-21	81,93488695	61	4,175024445	342,0801559
50-51	202,2467216	183	7,459729535	1508,705843
51-28	526,8520556	61	4,175024445	2199,620211
51-52	337,7957954	122	6,021348133	2033,986082
52-29	579,2824476	61	4,175024445	2418,518379
52-22	422,9781958	61	4,175024445	1765,944307
53-44	624,6083445	915	17,45782975	10904,30614
53-54	236,2522315	732	15,51645517	3665,79716
54-27	357,7715679	61	4,175024445	1493,705042
54-47	542,521238	671	14,81933594	8039,804479

5.2. Водоснабжение районов с дефицитом воды

Рассмотрим водоснабжение районов с дефицитом воды из высокогорных источников.

Для снижения дефицита воды в некоторых районах республик Северного Кавказа создаются протяженные трубопроводы (ПТ) из высокогорных источников к этим районам. Примером может служить ПТ Ошла-Кол-Дженал, снижающий дефицит воды в Зольском районе КБР, длина которого составляет 35,3 км.

На рисунке 12 представлена схема трубопровода по вертикали, а на рис. 11 в плане на карте Зольского района. От концевых точек ПТ далее строится потоковая сеть к населенным пунктам района с дефицитом воды.

Рис. 11.

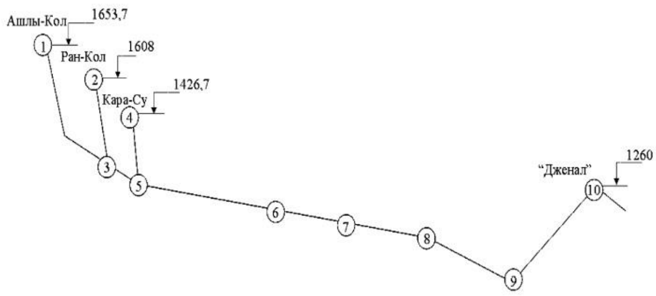


Рис. 12.

Таблица 6

№	Участок	Входные данные							Выходные данные			
		Напор в начале участка (м)	Расход по участку (м3/с)	Длина (м)	Диаметр (м) труб	Высотная отметка начала (м)	Высотная отметка конца (м)	Скорость (м/с)	Потери напора (м)	Напор в конце участка (м)	Примечания
1	1–3	0	0,04625	1603	0,2	1653,7	1386,1	1,47	30,1	237,4	Задвижка на DH=44,1м.
2	2–3	0	0,02355	1284	0,15	1608,2	1386,1	1,33	28,7	193,3	
3	3–5	193,3	0,06980	2458	0,3	1386,1	1224,7	0,98	12,2	342,4	Задвижка на DH=155,6м.
4	4–5	0	0,11020	1213	0,3	1426,7	1224,7	1,55	15,0	186,8	
5	5–6	186,8	0,18000	11613	0,6	1224,7	946,5	0,63	9,7	455,2	
6	6–7	455,2	0,16550	3674	0,6	946,5	875,3	0,58	2,6	523,9	
7	7–8	523,9	0,16550	4402	0,6	875,3	875,3	0,58	3,1	520,7	
8	8–9	520,7	0,16550	1459	0,6	875,3	842,0	0,58	1,0	553,0	
9	9–10	553,0	0,15250	7526	0,6	842,0	1260,0	0,53	4,5	130,4	

Решение в комплексе этих задач построения ПТ и потоковой сети от него снижает общие затраты на создание сети.

Решение же задачи с дополнительными возможными точками ветвления потоков на территории района с дефицитом воды, т. е. потоковой задачи Штейнера, дополнительно снижает затраты на несколько процентов (5–7%).

Отметим, что задача оптимизации потоковой сети решается, конечно, при соблюдении уравнения неразрывности потока (первого уравнения Кирхгофа), т. е. в каждом i-ом узле потребления сети обеспечивается заданное потребление потока q_i, и поэтому оптимизация сети не снижает ее дефицита. Сами значения дефицита воды q_i в каждом узле (пункте) потребления сети оцениваются и назначаются конструктором сети, исходя из сравнения общего потока воды q в сеть с оценкой дефицита воды в каждом пункте $i,\ i = 1, n$.

Заключение

Разработаны методы, алгоритмы и программная система компьютерного проектирования потоковых сетей Штейнера (свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ №2020660999 «Построение потоковой сети Штейнера 2-го ранга оптимальности» (137 страниц) с возможностью использования для оптимизации структуры больших разветвленных сетей водоснабжения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кудаев В.Ч., Абазоков М.Б.* Компьютерное проектирование потоковых сетей Р-го ранга оптимальности // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2019. № 6(92). С. 122–131. DOI:10.35330/1991-6639-2019-6-92-122-131.
2. *Багов М.А., Кудаев В.Ч.* Ранговая оптимизация сетей по переносу вещества и энергии // VIII международная конференция по математическому моделированию. Тезисы докладов. Якутск: Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова. 2017. С. 183.
3. *Гилберт Э.Н., Поллак Г.О.* Минимальные деревья Штейнера // Кибернетический сборник. Новая серия. Вып. 8. Москва: Мир, 1971. С. 19–49.
4. *Гордеев Э.Н., Тарасцов О.Г.* Задача Штейнера. Обзор // Дискретная математика. 1993. Т. 5. № 2. С. 3–28.
5. *Melzak Z.A.* On the problem of Steiner // Canad. Math. Bull. 1961. Vol. 4. Pp. 143–148.
6. *Панюков. А.В.* Топологические методы решения задачи Штейнера на графе // Автоматика и телемеханика. 2004. № 3. С. 89–99
7. *Korte B., Promel H.-J., Steger A.* Steiner trees in VLSI-layout // Rep. 89566-OR, Inst fur Okon. und Op. Res. Rheinische, Fr.-Wil.-Univ. Bonn, 1989.
8. *Лотарев Д.Т.* Задача Штейнера для транспортной сети на поверхности, заданной цифровой моделью // Автоматика и телемеханика. 1980. Т. 10. С. 104–115.
9. *Gilbert E.N.* Minimal Cost Communication Networks // Bell System technological Journal. 1967. № 9. Pp. 48–50.
10. *Багов М.А., Кудаев В.Ч.* Локальное решение сетевой задачи Штейнера // Доклады Адыгской (Черкесской) Академии наук, 2014. Т. 16. № 4. С. 9–14.
11. *Багов М.А., Кудаев В.Ч.* Преобразование терминальной сети в сеть Штейнера // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2015. № 6(68). С. 31–37.
12. *Багов М.А., Кудаев В.Ч.* Математическое моделирование и оптимизация трубопроводной сети Штейнера // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2017. № 1(75). С. 5–11.
13. *Багов М.А., Кудаев В.Ч.* Сетевая задача Штейнера с учетом энергетических затрат // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. № 4-1(16). С. 85–92.
14. *Багов М.А., Кудаев В.Ч.* Построение потоковой сети Штейнера второго ранга оптимальности // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2018. Том 154. С. 32–42.
15. *Багов М.А.* Нелокальное решение сетевой задачи Штейнера// Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. №1(12). С. 148-157. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-148-157.
16. *Абрамов Н.Н.* Расчет водопроводных сетей. Москва: Стройиздат, 1983. 275 с.
17. *Меренков А.П., Сеннова Е.В., Сумароков С.В. и др.* Математическое моделирование и оптимизация систем тепло-, водо-, нефте- и газоснобжения. Новосибирск: Наука, 1992. 407 с.
18. *Багов М.А., Скорикова Л.В.* Алгоритм построения базового графа задачи синтеза оптимальной потоковой сети // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки, 2018. № 4(24). С. 158–165.

19. *Кудаев В.Ч.* Ранги экстремумов и структурная оптимизация больших сетевых систем // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2016. № 4(72). С. 15–24.

Информация об авторе

Багов Марат Алиевич, науч. сотр. отдела вычислительных методов, Институт прикладной математики и автоматизации – филиал Кабардино-Балкарского научного центра РАН;
360000, Россия, Нальчик, ул. Шортанова, 89 А;
maratniipma@mail.ru

REFERENCES

1. Kudaev V.Ch., Abazokov M.B. Computer design of stream networks of the P-rank of optimality. *Izvestiya Kabardino-Balkarskogo nauchnogo centra RAN* [News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS]. 2019. No. 6 (92). Pp. 122–131. DOI: 10.35330 / 1991-6639-2019-6-92-122-131. (In Russian)

2. Bagov M.A., Kudaev V.Ch. Rank optimization of networks for the transfer of matter and energy. *III mezhdunarodnaya konferentsiya po matematicheskomu modelirovaniyu. Tezisy dokladov* [III international conference on mathematical modeling. Abstracts of reports]. 2017. Yakutsk: Severo-Vostochnyj federal'nyj universitet imeni M.K. Ammosova. P. 183. (In Russian)

3. Gilbert E.N., Pollak G.O. Steiner minimal trees. *Kiberneticheskiy sbornik* [Cybernetic collection]. New series. No. 8. Moscow: Mir, 1971. Pp. 19–49. (In Russian)

4. Gordeev E.N., Tarastsov O.G. Steiner's problem. Review. *Diskretnaya matematika* [Discrete Mathematics]. 1993. Vol. 5, No. 2. Pp. 3–28. (In Russian)

5. Melzak Z.A. On the problem of Steiner. Canad. Math. Bull. 1961. Vol. 4. Pp. 143–148.

6. Panyukov. A.V. Topological methods for solving the Steiner problem on a graph. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and telemechanics]. 2004. No. 3. Pp. 89–99. (In Russian)

7. Korte B., Promel H.-J., Steger A. Steiner trees in VLSI-layout. Rep. 89566-OR, Inst fur Okon. und Op. Res. Rheinische, Fr.-Wil.-Univ. Bonn, 1989.

8. Lotarev D.T. Steiner's problem for a transport network on a surface presented by a digital model. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and telemechanics]. 1980. Vol. 10. Pp. 104–115. (In Russian)

9. Gilbert E.N. Minimal Cost Communication Networks. Bell System Technological Journal. 1967. No. 9. Pp. 48–50.

10. Bagov M.A., Kudaev V.Ch. Local solution of the Steiner network problem. *Doklady Adygskoy (Cherkesskoy) Akademii nauk* [Reports of the Adyge (Circassian) Academy of Sciences]. 2014. Vol. 16. No. 4. Pp. 9–14. (In Russian)

11. Bagov M.A., Kudaev V.Ch. Transformation of the terminal network into the Steiner network. *Izvestiya Kabardino-Balkarskogo nauchnogo centra RAN* [News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS]. 2015. No. 6 (68). Pp. 31–37. (In Russian)

12. Bagov M.A., Kudaev V.Ch. Mathematical modeling and optimization of the Steiner pipeline network. *Izvestiya Kabardino-Balkarskogo nauchnogo centra RAN* [News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS]. 2017. No. 1 (75). Pp. 5–11. (In Russian)

13. Bagov M.A., Kudaev V.Ch. Steiner's network problem taking into account energy costs. *Vestnik KRAUNTS. Fiz.-mat. nauki* [Bulletin of Kamchatka Regional Association Scientific-Educational Center (KRASEC). Phys.-mat. Science]. 2016. No. 4-1 (16). Pp. 85–92. (In Russian)

14. Bagov M.A., Kudaev V.Ch. Construction of Steiner Streaming Network of the Second Optimality Rank. *Itogi nauki i tekhniki. Sovremennaya matematika i yeye prilozheniya. Temati-*

cheskiye obzory [Results of Science and Technics. Contemporary mathematics and its applications. Thematic reviews]. 2018. Vol. 154. Pp. 32–42. (In Russian)

15. Bagov M.A. Nonlocal solution of the Steiner network problem. *Vestnik KRAUNTS. Fiz.-mat. nauki* [Bulletin of Kamchatka Regional Association Scientific-Educational Center (KRASEC). Phys.-mat. Science]. 2018. No. 1 (12). Pp. 148–157. DOI: 10.18454 / 2079-6641-2018-24-4-148-157 (In Russian)

16. Abramov N.N. *Raschet vodoprovodnykh setey* [Calculation of water supply networks]. Moscow: Stroyizdat, 1983. 275 p. (In Russian)

17. Merenkov A.P., Sennova E.V., Sumarokov S.V. and other. *Matematicheskoye modelirovaniye i optimizatsiya sistem teplo-, vodo-, nefte- i gazosnobzheniya* [Mathematical modeling and optimization of heat, water, oil and gas supply systems]. Novosibirsk: Nauka, 1992. 407 p. (In Russian)

18. Bagov M.A., Skorikova L.V. Algorithm for constructing the base graph of the synthesis problem for an optimal streaming network. *Vestnik KRAUNTS. Fiz.-mat. nauki* [Bulletin of Kamchatka Regional Association Scientific-Educational Center (KRASEC). Phys.-mat. Science]. 2018. No. 4 (24). Pp. 158–165. (In Russian)

19. Kudaev V.Ch. Ranges of extrema and structural optimization of large network systems. *Izvestiya Kabardino-Balkarskogo nauchnogo centra RAN* [News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS]. 2016. No. 4 (72). Pp. 15–24. (In Russian)

MSC: 90C27; 90C90 Original article

BUILDING A STEINER FLOW NETWORK OF 2nd RANK OF OPTIMALITY

M.A. BAGOV

Institute of Applied Mathematics and Automation –
branch of Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences
360000, Russia, Nalchik, 89 A Shortanov street

Annotation. The existing methods for the synthesis of optimal streaming networks are tuned for the design of terminal networks. An additional gain in the cost and operation of networks for the planned period provides the connection of the synthesis problem of the terminal streaming network and the Steiner streaming network.

Keywords: Steiner streaming network, streaming network, cost reduction, dense base graph, computer design

The article was submitted 26.10.2021 *Accepted for publication 26.11.2021*

For citation. Bagov M.A. Building a Steiner flow network of 2nd rank of optimality. News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS. 2021. No. 6 (104). Pp. 185–203. DOI: 10.35330/1991-6639-2021-6-104-185-203

Information about the author

Bagov Marat Alievich, Researcher of the Department of Computational Methods, Institute of Applied Mathematics and Automation – branch of Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences;

360000, Russia, Nalchik, 89 A Shortanov street;

maratniipma@mail.ru