УДК 517.972, 519.633
DOI: 10.35330/1991-6639-2021-4-102-5-16
MSC: 39A60; 39B42

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПРИБЛИЖЕННЫМИ ИСХОДНЫМИ ДАННЫМИ НА ОСНОВЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРЫ ВТОРОГО РОДА

В.И. НААЦ, Е.П. ЯРЦЕВА, Л.В. АНДРУХИВ

Северо-Кавказский федеральный университет
355000, Ставропольский край, г. Ставрополь, пр. Кулакова, 2
E-mail: info@ncfu.ru

В математических моделях физических явлений, использующих результаты экспериментов, зачастую возникает необходимость решения дифференциальных уравнений. Подобные задачи относятся к классу некорректных математических задач. В данной работе для получения приближенного решения дифференциального уравнения первого порядка с определенными краевыми условиями выполняется построение соответствующего регуляризирующего алгоритма. Реализуется метод, заключающийся в построении эквивалентного исходному дифференциальному уравнению интегрального уравнения Вольтерры второго рода. Для его численного решения приводится вычислительный алгоритм, позволяющий получать устойчивые решения некорректной задачи.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, интегральное уравнение Вольтерры второго рода, итерационная вычислительная схема, вычислительный алгоритм.

Поступила в редакцию 30.04.2021

Для цитирования. Наац В.И., Ярцева Е.П., Андрухив Л.В. Вычислительная модель для дифференциального уравнения с приближенными исходными данными на основе интегрального уравнения Вольтерры второго рода // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2021. № 4(102). С. 5-16.

Введение

Многие научные исследования посвящены вопросам численного решения некорректных задач, в том числе решению дифференциальных уравнений с приближенными исходными данными, о чем свидетельствуют, например, монографии [1–3]. Из современных публикаций по данному научному направлению известны работы [4–8]. В работах ряда авторов [9–11] излагаются вопросы приложений интегральных уравнений Фредгольма для краевых задач. Кроме приведенных работ, существуют и многие другие, развивающие данное научное направление, являющееся современным и актуальным в области вычислительной математики.

Постановка задачи и подходы к ее решению. В работе [9] изложен подход и соответствующий итерационный метод, который далее приведем в сокращенном виде для большей наглядности. Рассматривается дифференциальное уравнение вида

$$u'(t) = F(t,u), \tag{1}$$

где $t \in [t_0, T]$, $u(t_0)$ задано и функционал $F(t,u)$ непрерывен и ограничен на множестве возможных решений $U \subset C_1$. Правая часть в (1) представлена своим σ- приближением $F_\sigma(t,u)$, в результате возникает проблема устойчивости приближенных решений $\tilde{u}(t)$

при наличии ошибок в исходных данных. Альтернативным подходом к построению решающего алгоритма является замена функционального уравнения (1) приближенным или «близким» к нему, например, уравнением вида

$$u'(t) + \alpha \cdot u(t) = F_\sigma(t,u)\,, \tag{2}$$

где параметр модели $\alpha > 0$ – достаточно малая величина, и выбор значений α с учетом ожидаемой величины погрешности σ реализуется в вычислительном эксперименте. При построении вычислительного алгоритма для уравнения (2) используется интегральное уравнение Вольтерры второго рода

$$u(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha\cdot\frac{t-t'}{T-t_0}} \cdot F_\sigma\left(t', u(t')\right)dt' + u(t_0)\cdot e^{-\alpha\cdot\frac{t-t_0}{T-t_0}}. \tag{3}$$

Наличие множителя $\exp\left\{-\alpha\cdot\dfrac{t-t'}{T-t_0}\right\}$ в уравнении (3) выражает стабилизирующее действие на сходимость последовательности приближенных решений $\left\{u_{\alpha(\sigma)}(t)\right\}$ при $\alpha(\sigma)\to 0\ (\sigma\to 0)$. Рассмотрим интегрируемую функцию $f(x)$, определенную на $\Omega = [a,b]\ (f(x)\in C_\Sigma(\Omega))$, тогда

$$\int_a^b K_n(x,x') f(x')dx' = f_n(x) = (K_n f)(x),$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \tag{4}$$

где $\{K_n(x,x')\}$ – последовательность функций $((x,x')\in\Omega\times\Omega')$, $(n=1,2,..)$, выбранная определенным образом, и ядра интегральных операторов K_n удовлетворяют условиям

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b K_n(x,x')dx' = 1\ \forall x\in\Omega,\ \ K_n(x,x') > 0\ \left(\forall (x,x')\in\Omega\times\Omega'\right),$$

$$K_n(x,x') = K_n(x-x') = K_n(|x-x'|)\to 0 \text{ при } |x-x'|\to\infty. \tag{5}$$

Очевидно, что $\{(K_n f)(x)\}\to f(x)$ в слабом смысле в каждой точке $x\in\Omega$. В соответствии с этим полагаем, что исследуемая функция $f(x)$ представляется аппроксимирующей последовательностью $\{(K_n f)(x)\}$ или интегралом (4) при условии (5). Такие представления с практической точки зрения имеют интерес для тех ситуаций, когда $f(x)$ представлена своим σ-приближением $f_\sigma(x)$, вектором приближенных значений $\vec{f}_\sigma$ размерности m либо приближенным уравнением. В работе исследуются такие представления функций интегралами Вольтерры, в которых соотношения (4) принимают вид

$$\int_{t_0}^{t} E_n(t,t')\cdot u(t')dt' = u_n(t) = (E_n u)(t)\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t)\,,\ (t'\le t),\ t\in[t_0,T]. \tag{6}$$

Интегральные представления функций (6) можно использовать в нестационарных моделях. Примером соответствующих ядер интегрального оператора E_n являются функции вида

$$E_n(t,t') = \frac{n}{d} e^{-n\cdot\frac{t-t'}{d}} \text{ при } t' \le t, \quad E_n(t',t) = \frac{n}{d} e^{-n\cdot\frac{t'-t}{d}} \text{ при } t \le t'. \tag{7}$$

Здесь d – некий параметр $(d > 0)$, который примем как $d = T - t_0$. В работе [1] показано, что $E_n(t,t')$ при $n = 1,2,\ldots$ удовлетворяет условиям (5) для $\forall u(t) \in C_\Sigma(\Omega_t)$, а также доказана справедливость основного предельного соотношения

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) = \lim_{n\to\infty} (E_n u)(t) = u(t), \tag{8}$$

$\forall t \in \Omega_t = [t_0, T]$, когда $E_n(t,t')$ определяется выражением (7). Использование изложенного выше аппарата аппроксимации функции в задачах численного решения дифференциальных уравнений требует построения аналогичных аппроксимирующих последовательностей для производных функций, входящих в эти уравнения. Если в точке $t \in [t_0, T]$ функция $u(t)$ имеет ограниченную производную, то аналогично (6):

$$(E_n u')(t) = \int_{t_0}^{t} E_n(t,t') u'(t') dt' = (u')_n(t),$$

$$\lim_{n\to\infty} (u')_n(t) = u'(t), \quad t' < t, \; t \in [t_0, T]. \tag{9}$$

Если $E_n(t,t') = \dfrac{n}{d} \exp\left\{ -n \cdot \dfrac{t-t'}{d} \right\}$, $t' \le t$, то $\left(E_n(t,t')\right)'_t = -\left(E_n(t,t')\right)'_{t'}$ и тогда, применяя формулу интегрирования по частям к интегралу в (9), получим

$$\int_{t_0}^{t} E_n(t,t') u'(t') dt' = \int_{t_0}^{t} \left(E_n(t,t')\right)'_t u(t') dt' + \psi_n(t,\bar{u}),$$

где $\psi_n(t,\bar{u}) = \left[E_n(t,t') u(t')\right]\Big|_{t'=t_0}^{t'=t}$. Если функция $\left(E_n(t,t')\right)'_t$ интегрируема по t' для всех пар (t,n), то имеет место предельное соотношение

$$(u')_n(t) = \int_{t_0}^{t} \left(E_n(t,t')\right)'_t u(t') dt' + \psi_n(t,\bar{u}) \to u'(t) \tag{10}$$

при $n \to \infty$ для всякой функции $u(t)$, дифференцируемой в точке t. Равенство (10) определяет оператор $\widetilde{D}_n : u \to (u')_n$, который в силу того, что $\lim_{n\to\infty} (u')_n(t) = u'(t)$, можно считать оператором «дифференцирования» исходной функции $u(t)$. Это примем в обозначении $(\widetilde{D}_n u)(t) \to (Du)(t)$ при $n \to \infty$ в каждой точке $t \in [t_0, T]$, тогда оператор $\widetilde{D}_n$ в соответствии с формулой (10) формально определен для любой интегрируемой функции $u(t)$, потому он считается «оператором дифференцирования» в обобщенном смысле, то есть при $n \to \infty$ оператор $\widetilde{D}_n$ в пределе эквивалентен оператору обычного дифференцирования $D = \dfrac{d}{dt}$.

Пусть исследуемая функция $u(t)$ есть решение уравнения (1). Заменим последовательности $\{(E_n u)(t)\}$ параметрическими семействами функций вида $\{(E_\tau u)(t)\}$ путем введения параметра $\tau = \dfrac{1}{n}$, изменяющегося в пределах интервала $(0,1)$. Это позволит рассматривать задачи оптимального приближения функции $u(t)$ функциями указанного семейства. Так, если функция $u(t)$ представлена σ-приближением $u_\sigma(t)$, $t \in [t_0, T]$, то появляется возможность оптимальной оценки параметра τ при заданном σ. Речь идет об алгоритме решения оптимизационной задачи типа $\min\limits_{\tau\in(0,1)} \inf\limits_{u\in U} \left\| (E_\tau u)(t) - u_\sigma(t) \right\|$, который для заданного $u_\sigma(t)$ определяет пару (u^*, τ^*). При такой формулировке, учитывая, что $d = T - t_0$ $E_\tau(t,t') = \dfrac{1}{\tau \cdot T} e^{-\frac{t-t'}{\tau \cdot T}}$, $(E_\tau(t,t'))'_t = -\dfrac{1}{\tau \cdot T} E_\tau(t,t')$, предельное соотношение (10) примет вид

$$\left(\widetilde{D}_\tau u\right)(t) = \frac{1}{\tau \cdot T} \cdot \left[-\int_{t_0}^{t} E_\tau(t,t') \cdot u(t')dt' + u(t) - u(t_0) \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau \cdot T}} \right],$$

$\tau \in (0,1)$, оператор $\widetilde{D}_\tau$ есть непрерывная функция параметра τ. Поскольку при $\tau \to 0$ $\widetilde{D}_\tau \to D$, сменив D на $\widetilde{D}_\tau$ в исходном уравнении $(Du)(t) = F(t,u)$, приходим к приближенному аналогу $\left(\widetilde{D}_\tau u\right)(t) = F(t,u)$, то есть интегральному уравнению Вольтерры второго рода:

$$u(t) = \frac{1}{\tau \cdot T} \int_{t_0}^{t} e^{-\frac{t-t'}{\tau \cdot T}} u(t')dt' + \tau \cdot T \cdot F(t,u) + u(t_0) \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau \cdot T}}. \qquad (11)$$

Следовательно, задача Коши, состоящая в нахождении функции $u(t)$, удовлетворяющей исходному уравнению (1) при заданном начальном условии $u(t_0)$, в рамках изложенной теории сводится к построению последовательности приближенных решений $\widetilde{u}_\tau(t)$ интегрального уравнения (11), сходящегося к $u(t)$ при $\tau \to 0$. В силу указанных особенностей решения $\widetilde{u}_\tau(t)$ являются слабыми (обобщенными) решениями исходной задачи.

Разработка итерационного метода и исследование сходимости. С вычислительной точки зрения интегральное уравнение Вольтерры второго рода при общих ограничениях является стандартной задачей, которую можно решить итерационным методом. Интегральное уравнение вида

$$u(t) = \lambda \cdot \int_{t_0}^{t} K(t,y)u(y)dy + \varphi(t)$$

при любом ограниченном и непрерывном ядре $K(t,y)$ решим методом последовательных приближений по схеме

$$u^{(\nu)}(t)=\lambda\cdot\int_{t_0}^{t}K(t,y)u^{(\nu-1)}(y)dy+\varphi(t), \qquad (12)$$

$\nu=1,2,...$ с начальным приближением $u^{(0)}(t)=\varphi(t)$. Для рассматриваемого уравнения (12) с ядром $K(t,y)=e^{-\frac{t-y}{\lambda}}$ $\left(\lambda=(\tau\cdot T)^{-1}\right)$ можно найти итерированное ядро, то есть вычислить функцию $K_m(t,y)=\int_{t_0}^{t}K_{m-1}(t,y')K(y',y)dy'$, $m=1,2,...$. В результате итерационный процесс (12) сводится к вычислению интеграла $u^{(\nu)}(t)=\varphi(t)+\int_{t_0}^{t}\lambda^{\nu}\cdot\left[\sum_{m=1}^{\nu}K_m(t,y)\right]\cdot\varphi(y)dy$, где

$$K_m(t,y)=e^{-\frac{t-y}{\tau\cdot T}}\cdot\frac{(t-y)^{m-1}}{(m-1)!}. \qquad (13)$$

Если $\varphi(t)$ зависит от $u(t)$, в вычислительной схеме вместо $\varphi(t)$ фигурирует $\varphi(t,u^{(\nu-1)})$. Очевидно, что для сходимости последовательностей приближенных решений $\{u^{(\nu)}(t)\}$ необходимы непрерывность и ограниченность частных производных $\varphi(t,u)$ по соответствующим переменным (условия Коши).

Технику построения итерационной схемы (12) и анализ ее сходимости для уравнения (11) приведем ниже. В соответствии с (12) имеем

$$u^{(\nu)}(t)=\frac{1}{\tau\cdot T}\cdot\int_{t_0}^{t}e^{-\frac{t-t'}{\tau\cdot T}}\cdot F\left(t',u^{(\nu-1)}(t')\right)dt'+\tau\cdot T\cdot F\left(t,u^{(\nu-1)}(t)\right)+u(t_0)\cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau\cdot T}}. \qquad (14)$$

Используя разностные соотношения, выражение (14) представим в виде

$$\left(\Delta^{(\nu,\nu-1)}u\right)(t)=\frac{1}{\tau\cdot T}\cdot\int_{t_0}^{t}e^{-\frac{t-t'}{\tau\cdot T}}\cdot\left(\Delta^{(\nu-1,\nu-2)}F\right)(t')dt'+\tau\cdot T\cdot\left(\Delta^{(\nu-1,\nu-2)}F\right)(t). \qquad (15)$$

Для сходимости схемы (15) при $\nu\to\infty$ необходимо обеспечить выполнение неравенства $\left|\left(\Delta^{(\nu,\nu-1)}u\right)(t)\right|<\left|\left(\Delta^{(\nu-1,\nu-2)}u\right)(t)\right|$ для всех значений ν и $t\in[t_0,T]$. По условию задачи считаем, что существует такое M, что для всех ν и t выполняется соотношение

$$\left|\left(\Delta^{(\nu,\nu-1)}u\right)(t)\right|<M\left|\left(\Delta^{(\nu-1,\nu-2)}u\right)(t)\right|, \qquad (16)$$

где $M=\max_u\left|\frac{\partial F}{\partial u}\right|$. По условию Коши такая постоянная M для уравнения (1) существует. Кроме того, для сходимости (16) необходимо выполнение условия $\tau\cdot T\cdot M<1$. Для интегрального члена соответствующая сходимость $\{u^{(\nu)}(t)\}$ обеспечивается равенством (13).

Интересно сопоставить полученное ограничение на константу M с тем, что требуется выполнить для сходимости итерационной схемы

$$u^{(\nu)}(t) = \int_{t_0}^{t} F\left(t', u^{(\nu-1)}(t')\right)dt' + u(t_0)\,,$$

непосредственно следующей из структуры уравнения (1). Условие $T \cdot M < 1$ необходимо для выполнения неравенства (16). Естественно, что предлагаемая схема (14) менее жестка на ограничения по сходимости вычислительного процесса, связанного с построением последовательных приближений решений дифференциального уравнения.

Дискретизация задачи и построение вычислительного алгоритма. Далее рассмотрим подход, связанный с разработкой вычислительного алгоритма, то есть с дискретизацией интегральных представлений, используемых в качестве исходного аналитического аппарата излагаемой теории, и построением алгоритмов корректного решения задачи восстановления функций и их производных.

Здесь исходными соотношениями при восстановлении функции $f(t)$ в интервале $\Omega = [t_0, T]$ по вектору приближенных значений $\vec{f}_\sigma$, ассоциированному с неким покрытием указанного интервала системой $\{\Omega_l\}_{l=1}^{m}$, является выражение (6). В соответствии с равенством (1) исследуемая функция $f(t)$ рассматривается как предельный элемент последовательности функций $\{(E_n f)(t)\}_{n=1}^{\infty}$. Как было отмечено выше, указанная последовательность сходится к $f(t)$ равномерно при условии, что $f(t)$ всюду непрерывна в Ω_t. Если функция представлена системой дискретных значений $\{f(t_k)\}_{k=0}^{m}$, ассоциированной с некой системой узлов $\{t_k\}_{k=0}^{m}$ на Ω_t (тоже системой подинтервалов $\{\Omega_l\}_{l=1}^{m}$), то для вычисления интегралов требуются соответствующие квадратурные формулы. Кратко рассмотрим возможные подходы к их построению. Для фиксируемого узла t_l на Ω_t интеграл типа Вольтерры в (6) может быть представлен интегральной суммой

$$I_l(f) = \int_{t_0}^{t_l} E_\tau(t_l, t') f(t')dt' = \int_{t_0}^{t_l} \frac{1}{\tau T} e^{-\frac{t_l - t'}{\tau T}} f(t')dt' = \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{\tau T} \int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{-\frac{t_l - t'}{\tau T}} f(t')dt', \qquad (17)$$

$$l = 1, 2, \ldots, m,\; j = 1, 2, \ldots, l.$$

Так как исследуемая функция $f(t)$ представлена значениями $\{f(t_k) = f_k\}_{k=0}^{m}$, то при вычислении интеграла в (17) примем в качестве локальной модели для $f(t)$ отрезок ломаной линии

$$f_M^{(j)}(t) = f_{j-1} + \frac{f_j - f_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}(t - t_{j-1}),\; (t_{j-1} \le t \le t_j).$$

На основе этой модели можно выстроить расчетную схему для вычисления интегральных сумм для (6). Имеем

$$I_l(f) = \sum_{j=1}^{l} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{1}{\tau T} e^{-\frac{t_l - t'}{\tau T}} \left(f_{j-1} + \frac{f_j - f_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}(t' - t_{j-1}) \right) dt' =$$

$$= \sum_{j=1}^{l}\left[f_{j-1}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\frac{1}{\tau T}e^{-\frac{t_l-t'}{\tau T}}dt' + \frac{f_j - f_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\frac{1}{\tau T}e^{-\frac{t_l-t'}{\tau T}}\left(t' - t_{j-1}\right)dt'\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{l}\left[f_{j-1}A_j^l + \frac{f_j - f_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}B_j^l\right], \tag{18}$$

где обозначено

$$A_j^l = \int_{t_{j-1}}^{t_j}\frac{1}{\tau T}e^{-\frac{t_l-t'}{\tau T}}dt', \quad B_j^l = \int_{t_{j-1}}^{t_j}\frac{1}{\tau T}e^{-\frac{t_l-t'}{\tau T}}\left(t' - t_{j-1}\right)dt'. \tag{19}$$

Интегралы (19) можно вычислить явно, так как $A_j^l = e^{-\frac{t_l-t_j}{\tau T}} - e^{-\frac{t_l-t_{j-1}}{\tau T}}$, или в случае $h = t_j - t_{j-1}$ $A_j^l = e^{-\frac{t_l-t_j}{\tau T}}\left(1 - e^{-\frac{h}{\tau T}}\right)$ для всех $j = 1, 2, \ldots, m$. Интеграл, связанный с вычислением B_j^l (19), вычисляется на основе стандартной формулы $\int te^{at}dt = \frac{e^{at}}{a^2}\left(at - 1\right)$:

$$B_j^l = \frac{1}{\tau T}\int_{t_{j-1}}^{t_j}e^{-\frac{t_l-t'}{\tau T}}t'dt' - \frac{1}{\tau T}t_{j-1}\int_{t_{j-1}}^{t_j}e^{-\frac{t_l-t'}{\tau T}}dt' =$$

$$= \left(\tau T\right)\left\{\left[e^{-\frac{t_l-t_j}{\tau T}}\left(\frac{t_j}{\tau T} - 1\right) - e^{-\frac{t_l-t_{j-1}}{\tau T}}\left(\frac{t_{j-1}}{\tau T} - 1\right)\right] - t_{j-1}\left[e^{-\frac{t_l-t_j}{\tau T}} - e^{-\frac{t_l-t_{j-1}}{\tau T}}\right]\right\}.$$

Таким образом, для интеграла (18) получим выражение

$$I_l\left(f\right) = \sum_{j=1}^{l}\frac{1}{h}\left[f_jB_j^l + f_{j-1}C_j^l\right],$$

где $C_j^l = B_j^l - hA_j^l$, и окончательный результат

$$I_l\left(f\right) = \sum_{k=0}^{l}G_k^l f_k, \ \left(k = 0, 1, \ldots, m\right), \ \left(k \le l\right).$$

Коэффициенты G_k^l выражаются через B_j^l и $C_j^l : G_k^l = h^{-1}\left(B_k^l - C_{k+1}^l\right), \ \left(k = 0, 1, \ldots, m\right)$, где $B_0^l = 0$, $C_{m+1} = 0$, учитывая то, что конечномерный аналог соотношений (6) выглядит так:

$$\begin{cases} \left(E_\tau f\right)\left(t_l\right) \cong \sum_{k=0}^{l}G_k^l\left(\tau, h\right)f_k, \\ \lim\limits_{\substack{\tau\to 0^+ \\ (h\to 0)}}\sum_{k=0}^{l}G_k^l\left(\tau, h\right)f_k = f_l, \ l = 1, 2, \ldots, m, \ k = 0, \ldots, l. \end{cases} \tag{20}$$

Практическое использование соотношений (20) требует проведения вычислительных экспериментов по изучению сходимости модуля уклонения $\left|\sum_{k=0}^{l} G_k^l(\tau,h) - f_l\right|$ для каждого l в зависимости от параметров τ и h векторной модели. При этом важным моментом является установление зависимости между ними, то есть $h(\tau)$ либо $\tau(h)$. Если вектор исходных данных задан приближенно своим σ-приближением $\vec{f}_\sigma$ $\left(\dim \vec{f} = m\right)$, то предпочтительно использовать уклонение в среднем $\sum_{l=1}^{m}\left|\sum_{k=0}^{l} G_k^l(\tau,h) f_k - f_{l,\sigma}\right|$ либо $\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{k=0}^{l} G_k^l(\tau,h) f_k - f_{l,\sigma}\right)^2$. Используя конечномерные представления (20) исходного интегрального представления $f(t)$ (6) обратимся к задаче «восстановления» $f(t)$ в Ω_t по вектору приближенных значений $\vec{f}_\sigma = \left\{f_{\sigma,k}\right\}_{k=0}^{n}$ и построим соответствующий вычислительный алгоритм.

Пусть данный вектор $\vec{f}_\sigma$ размерности n ассоциирован с системой узлов на Ω_t $\{t_i\}_{i=0}^{n}$. Так как значение $f_{\sigma,i}$ является приближенным, то нельзя связывать число $f_{\sigma,i}$ непосредственно с $f_\sigma(t_i)$, считая, что узел t_i задан «точно». Будем полагать, что значение $f_{\sigma,i}$ есть некое среднее эмпирической функции $f_\sigma(t)$ в локальной окрестности точки t_i. Такая интерпретация приближенных данных $\left\{f_{\sigma,i}\right\}_{i=0}^{n}$ допустима в рамках используемого аналитического аппарата, основанного на вычислении интегралов вида $(E_n f_\sigma)(t)$ в соотношении (6). Примем далее, что в области $\Omega_t = [t_0, T]$ фиксирована система узлов $\{t_n\}_{n=0}^{m}$, с которой связана система чисел $\{f_n\}_{n=0}^{m}$, интерпретируемая как $\{f(t_k)\}_{k=0}^{m}$ и которую нужно определить из соотношений (20). Будем полагать, что в качестве l в (20) выбирается тот индекс из множества $\{i\}_{i=0}^{n}$, с которым связано множество исходных данных $\left\{f_{\sigma,i}\right\}_{i=0}^{n}$, и ему соответствует точка t_l^*, ближайшая слева к точке t_i. Эту точку обозначим через $t_{l(i)}$ и получим следующую систему приближенных соотношений для исходных данных $\left\{f_{\sigma,i}\right\}_{i=0}^{n}$:

$$(E_\tau f)(t_i) \cong \sum_{k=0}^{l(i)} G_k^l(\tau,h) f_k \cong f_{\sigma,i}, \tag{21}$$

$$i = 0,1,\ldots,n,\ \ l = 1,2,\ldots,m,\ \ k = 0,1,\ldots,l < m.$$

Полагаем, что $m>n$, тогда сетка $\{t_k\}_{k=0}^{m}$ предназначается для корректного вычисления интегральных сумм в (21). С этой сеткой связан искомый вектор $\vec{f}$ размерности m. Будем считать, что узлы сетки являются равноотстоящими, и для ее определения достаточно найти числа $h = t_k - t_{k-1}$ $(k = 0,1,\ldots,m)$. Сетка $\{t_i\}_{i=0}^{n}$ является произвольной и определяется способом получения последовательности $\left\{f_{\sigma,i}\right\}_{i=0}^{n}$. Для установления компонент вектора $\vec{f}$ применяются методы оптимизации (как безусловной, так и условной), а именно:

$$\inf_{\tau\in(0,1)}\min_{\vec{f}\in R_m}\rho\left(\hat{G}_\tau\vec{f},\vec{f}_\sigma\right)=\rho\left(\hat{G}_{\tau^*}\vec{f}^*,\vec{f}_\sigma\right)\le\sigma\left\|\vec{f}^*\right\|, \tag{22}$$

где метрика ρ связана с нормами $\|\cdot\|_{l_1}$ либо $\|\cdot\|_{l_2}$. Таким образом, определение вектора $\vec{f}^*$ связано с решением линейной системы вида $\hat{G}_\tau\vec{f}=\vec{f}_\sigma$, где матрица $\hat{G}_\tau=\left\{G_k^l\right\}$, и нахождением нормального (обобщенного) решения такой системы. Используя методы условной оптимизации и вводя ограничения на $\left\|\vec{f}\right\|_{l_2}$, можно выписать в явном виде обобщенный обратный оператор, а именно $\hat{G}_\alpha^{-1}=\left(\hat{G}^*\hat{G}+\alpha I\right)^{-1}G^*$, где $\alpha>0$ – сколь угодно малое число.

Найденный из решения оптимизационной задачи (22) вектор $\vec{f}^*$ применяется для построения аппроксимирующего аналога искомой функции $f(t)$ на основе соответствующей интегральной суммы. Итак, согласно интегралу $(E_n f)(t)$ в (6)

$$f(t)\approx\sum_{k=0}^{l(t)}G_k^l\left(\tau^*,h\right)f_k^{\ *}=f^*(t) \tag{23}$$

для всех $t\in\Omega_t=[t_0,T]$ $\left(\tau^*>0\right)$. Решение $f^*(t)$, представленное некоторой непрерывной функцией, т. е. обобщенным полиномом порядка *m* в понятиях теории приближения, позволяет использовать термин «восстановление непрерывного хода (графика) $f(t)$». Формально $f^*(t)$ сходится к $f(t)$ при $\tau\to0$ и $h\to0$ в слабом смысле, как это следует из соотношений (6). Тем не менее, если речь идет о непрерывности $f(t)$ в каждой точке $t\in\Omega_t$, то можно говорить и о равномерной сходимости, о чем речь шла выше.

В заключение сделаем несколько замечаний относительно «восстановления производной» $(Df)(t)$ искомой функции $f(t)$ в условиях, когда известен вектор $\vec{f}^*$ размерности *m*. В работе показано, что данную задачу можно решить на основе оператора обобщенного дифференцирования, так как если функция $f(t)$ дифференцируема в точке *t* и ее производная суммируема почти всюду в Ω_t, то справедливо записать представление $(Df)(t)$ в виде интегралов типа (6):

$$\begin{cases}\int\limits_{t_0}^{t}E_n(t,t')(Df)f(t')dt'=(E_nDf)(t)=(Df)_n(t),\\ \lim\limits_{n\to\infty}(Df)_n(t)=Df(t),\ \ t\in\Omega.\end{cases} \tag{24}$$

При этом в качестве оператора обобщенного дифференцирования примем интегральный оператор вида

$$\left(\tilde{D}_\tau f\right)(t)=\frac{1}{\tau T}\left[f(t)-\left(E_\tau f\right)(t)-f\left(t_0\right)e^{-\frac{t-t_0}{\tau T}}\right]. \tag{25}$$

Если $f(t)$ обладает непрерывной производной $f'(t)$, то $\left(\tilde{D}_\tau f\right)(t)\to(Df)(t)$ равномерно на Ω_t. В равенстве (25) интеграл $\left(E_\tau f\right)(t)$ для найденного вектора $\vec{f}^{\,*}$ представляется интегральной суммой (23).

Заключение. Изложенный в статье алгоритм требует реализации в вычислительном эксперименте, разработки соответствующих тестовых задач и получения на их основе численных решений с анализом полученных результатов. Это большая работа, которой будут посвящены дальнейшие исследования авторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.

2. *Наац И.Э., Зуев В.Е.* Обратные задачи оптики атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1990. 270 с.

3. *Zuev V.E., Naats I.E.* Inverse Problems of Lidar Sensing of the Atmosphere. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York. 1983. 260 p.

4. *Митрохин С.И.* Периодическая краевая задача для дифференциального оператора четвертого порядка с суммируемым потенциалом // Владикавказский математический журнал. 2017. № 4. Том 19. С. 35–49.

5. *Расолько Г.А., Шешко С.М., Шешко М.А.* Об одном методе численного решения некоторых сингулярных интегро-дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2019. № 9. Том 55. С. 1285–1292.

6. *Табаринцева Е.В.* О решении некорректно поставленной задачи для нелинейного дифференциального уравнения // Труды института математики и механики УРО РАН. 2015. № 1. Том 21. С. 231–237.

7. *Матысик О.В.* Неявный итерационный метод решения несамосопряженной некорректной задачи с приближенным оператором и приближенно заданной правой частью // Вестник Гродненского государственного университета им. Янки Купалы. 2015. № 3. С. 75–82.

8. *Gulin A.V., Morozova V.A.* On the Stability of Nonlocal Difference Schemes in Subspaces // Differential Equations. 2014. Vol. 50, № 7. Pp. 888–898.

9. *Наац И.Э., Наац В.И.* Представление функций и их производных интегралами Вольтерры в численных методах решения дифференциальных уравнений // Вестник Ставропольского государственного университета. 2011. Выпуск 75(4). С. 5–13.

10. *Наац И.Э., Наац В.И., Рыскаленко Р.А.* Вычислительная модель для дифференциального уравнения с эмпирическими функциями на основе интегрального уравнения Фредгольма первого рода // Наука. Инновации. Технологии: научный журнал Северо-Кавказского федерального университета. 2016. Выпуск № 2. С. 37–48.

11. *Наац В.И., Рыскаленко Р.А., Ярцева Е.П.* Обратные задачи и качественные модели в проблеме мониторинга атмосферы. LAP LAMBERT Academic Publishing. 2015. 405 с.

REFERENCES

1. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods for solving incorrect (ill-posed) problems]. M.: Science. 1979. 288 p.

2. Naats I.E., Zuev V.E. *Obratnyye zadachi optiki atmosfery* [Inverse problems of atmospheric optics]. L.: Gidrometeoizdat. 1990. 270 p.

3. Zuev V.E., Naats I.E. Inverse Problems of Lidar Sensing of the Atmosphere. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York. 1983. 260 p.

4. Mitrokhin S.I. *Periodicheskaya krayevaya zadacha dlya differentsial'nogo operatora chetvertogo poryadka s summiruyemym potentsialom* [Periodic boundary value problem for a fourth-order differential operator with a summable potential] // Vladikavkaz Mathematical Journal. 2017. No. 4. Vol. 19. Pp. 35–49.

5. Rasolko G.A., Sheshko S.M., Sheshko M.A. On one method of numerical solution of some singular integro-differential equations // Differential Equations. 2019. No. 9. Volume 55. Pp. 1285–1292.

6. Tabarintseva E.V. *O reshenii nekorrektno postavlennoy zadachi dlya nelineynogo differentsial'nogo uravneniya* [On the solution of an ill-posed problem for a nonlinear differential equation] // *Trudy instituta matematiki i mekhaniki URO RAN* [Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics URO RAS]. 2015. No. 1. Volume 21. Pp. 231–237.

7. Matysik O.V. *Neyavnyy iteratsionnyy metod resheniya nesamosopryazhennoy nekorrektnoy zadachi s priblizhennym operatorom i priblizhenno zadannoy pravoy chast'yu* [An implicit iterative method for solving a non-self-adjoint ill-posed problem with an approximate operator and an approximately given right-hand side] // *Vestnik Grodnenskogo gosudarstvennogo universiteta im. Yanki Kupaly* [Bulletin of the Grodno State University n.a. Yanko Kupala]. 2015. No. 3. Pp. 75-82.

8. Gulin A.V., Morozova V.A. On the Stability of Nonlocal Difference Schemes in Subspaces // Differential Equations. 2014. Volume 50. № 7. Pp. 888–898.

9. Naats I.E., Naats V.I. *Predstavleniye funktsiy i ikh proizvodnykh integralami Vol'terry v chislennykh metodakh resheniya differentsial'nykh uravneniy* [Representation of functions and their derivatives by Volterra integrals in numerical methods for solving differential equations] // *Vestnik Stavropol'skogo gosudarstvennogo universiteta* [Bulletin of the Stavropol State University]. 2011. Issue 75 (4). Pp. 5-13.

10. Naats I.E., Naats V.I., Ryskalenko R.A. *Vychislitel'naya model' dlya differentsial'nogo uravneniya s empiricheskimi funktsiyami na osnove integral'nogo uravneniya Fredgol'ma pervogo roda* [Computational model for a differential equation with empirical functions based on the Fredholm integral equation of the first kind] // *Nauka. Innovatsii. Tekhnologii: Nauchnyy zhurnal Severo-Kavkazskogo federal'nogo universiteta* [Science. Innovation. Technologies": Scientific journal of the North Caucasus Federal University]. Issue No. 2. 2016. Pp. 37–48.

11. Naats V.I., Ryskalenko R.A., Yartseva E.P. *Obratnyye zadachi i kachestvennyye modeli v probleme monitoringa atmosfery* [Inverse problems and qualitative models in the problem of atmospheric monitoring] LAP LAMBERT Academic Publishing. 2015. 405 p.

COMPUTATIONAL MODEL FOR A DIFFERENTIAL EQUATION WITH APPROXIMATE INITIAL DATA BASED ON THE VOLTERRA INTEGRAL EQUATION OF THE SECOND KIND

V.I. NAATS, E.P. YARTSEVA, L.V. ANDRUKHIV

North Caucasus Federal University
355000, Stavropol Territory, Stavropol, Kulakov Ave., 2
E-mail: info@ncfu.ru

In mathematical models of physical phenomena that use the results of experiments, it is often necessary to solve differential equations. Such problems belong to the class of incorrect mathematical problems. In this paper, to obtain an approximate solution of a first-order differential equation with certain boundary conditions, the corresponding regularizing algorithm is constructed. A method is implemented that consists in constructing a Volterra integral equation of the second kind equivalent to the original differential equation. For its numerical solution, we present a computational algorithm that allows us to obtain stable solutions to an ill-posed problem.

Keywords: differential equation, Volterra integral equation of the second kind, iterative computational scheme, computational algorithm.

Received by the editors 30.04.2021

For citation. Naats V.I., Yartseva E.P., Andrukhiv L.V. Computational model for a differential equation with approximate initial data based on the Volterra integral equation of the second kind // News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS. 2021. No. 4 (102). Pp. 5-16.

Сведения об авторах:

Наац Виктория Игоревна, д.ф.-м.н., профессор, кафедра математического моделирования Северо-Кавказского федерального университета, институт математики и информационных технологий им. проф. Н.И. Червякова.

355000, Ставропольский край, г. Ставрополь, пр. Кулакова, 2.

Ярцева Елена Павловна, к.ф.-м.н., доцент, кафедра математического моделирования Северо-Кавказского федерального университета, институт математики и информационных технологий им. проф. Н.И. Червякова.

355000, Ставропольский край, г. Ставрополь, пр. Кулакова, 2.

E-mail: yartseva_elena@mail.ru

Андрухив Людмила Викторовна, к.пед.н., доцент, кафедра математического моделирования Северо-Кавказского федерального университета, институт математики и информационных технологий им. проф. Н.И. Червякова.

355000, Ставропольский край, г. Ставрополь, пр. Кулакова, 2.

E-mail: lvandruhiv@mail.ru

Information about the authors:

Naats Viktoria Igorevna, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematical Modeling, North Caucasus Federal University, Institute of Mathematics and Information Technologies named after prof. . N.I. Chervyakov.

355000, Stavropol Territory, Stavropol, Kulakov Ave., 2.

Yartseva Elena Pavlovna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematical Modeling, North Caucasus Federal University, Institute of Mathematics and Information Technologies named after prof. N.I. Chervyakov.

355000, Stavropol Territory, Stavropol, Kulakov Ave., 2.

E-mail: yartseva_elena@mail.ru

Andrukhiv Lyudmila Viktorovna, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematical Modeling, North Caucasus Federal University, Institute of Mathematics and Information Technologies named after prof. N.I. Chervyakov.

355000, Stavropol Territory, Stavropol, Kulakov Ave., 2.

E-mail: lvandruhiv@mail.ru