УДК 517.95
MSC: 35R11
DOI: 10.35330/1991-6639-2020-3-95-5-12

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ДРОБНОГО ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ

Р.А. ПШИБИХОВА

Институт прикладной математики и автоматизации –
филиал ФГБНУ «Федеральный научный центр
«Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук»
360000, КБР, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А
E-mail: ipma@niipma.ru

В данной работе исследуется нелокальная краевая задача для обобщенного телеграфного уравнения с производными дробного порядка. Дробное дифференцирование задается с помощью оператора Капуто. Уравнение рассматривается в ограниченной прямоугольной области плоскости двух независимых переменных. Нелокальные краевые условия задаются в форме частных интегральных выражений от искомого решения по каждой из переменных с заданными непрерывными ядрами. Используя полученное ранее представление решения задачи Гурса для исследуемого уравнения в терминах функции типа Райта, рассматриваемую задачу удается редуцировать к системе линейных интегральных уравнений Вольтерра относительно следов искомого решения на части границы области. В итоге доказана теорема существования и единственности решения исследуемой задачи, найдено его представление в терминах решений полученной системы интегральных уравнений.

Ключевые слова: нелокальная задача, производная Капуто, дробное телеграфное уравнение, интегральное условие, функция типа Райта.

1. Введение

В области $D = (0,a) \times (0,b), \quad 0 < a < \infty,\ 0 < b < \infty$, рассмотрим уравнение

$$\partial_{0x}^{\alpha}\partial_{0y}^{\beta}u(x,y) + \lambda u(x,y) = f(x,y), \tag{1}$$

где $\alpha, \beta \in (0, 1)$, $\lambda \in \mathrm{R}$, ∂_{0s}^{γ} – производная Капуто порядка γ по переменной s, определяемая с помощью равенства [1; с. 11]

$$\partial_{0s}^{\gamma}g(s) = D_{0s}^{\gamma-n}\, \mathrm{g}^{(n)}(s), \quad n-1 < \gamma \leq n,\ n \in N, \tag{2}$$

D_{0s}^{γ}– оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана – Лиувилля порядка γ с началом в точке 0 по переменной s>0, определенный следующим образом [1, с. 9]:

$$D_{0s}^{\gamma}f(s) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\gamma)}\int_0^s \frac{f(v)}{(s-v)^{\gamma+1}}dv, & \gamma < 0, \\ f(s), & \gamma = 0, \\ \left(\frac{d}{ds}\right)^n D_{0s}^{\gamma-n}f(\mathrm{s}), & \gamma > 0. \end{cases}$$

Уравнения дробного порядка возникают при математическом моделировании различных процессов и явлений в системах с фрактальной структурой и памятью.

Распространение электромагнитных волн в линиях описывается волновыми уравнениями, которые исторически называют телеграфными уравнениями, поскольку впервые они были использованы для описания волн в телеграфных линиях.

В настоящее время известны различные подходы к обобщению телеграфного уравнения, включая подходы, основанные на редукции к уравнениям и системам меньшего порядка (см., например, [2, 3, 4]).

Ранее в работе [5] доказана теорема существования и единственности решения аналога задачи Гурса для уравнения вида (1) с производными Римана – Лиувилля. В работе [6] для уравнения (1) в случае оператора Римана – Лиувилля и $\lambda = 0$ рассмотрены аналоги задачи Коши и задачи Гурса. В работе [7] решен аналог задачи Гурса с интегральным условием для уравнения (1). А в работе [8] решена задача Гурса для уравнения (1). Более полный обзор работ, посвященных исследованию уравнений в частных производных дробного порядка, можно найти в [9] и [10].

В данной работе строится решение нелокальной задачи с интегральными условиями для уравнения (1).

2. Постановка задачи

Регулярным решением уравнения (1) в области $D = (0,a) \times (0,b)$ будем называть функцию $u(x,y)$, абсолютно непрерывную в $\overline{D}$(см., например, [11, с. 246]), удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $(x,y) \in D$.

В связи с тем, что существуют разные подходы к определению абсолютной непрерывности в многомерных случаях, мы позволим дать себе следующее определение:

Функция $F(x,y)$ называется абсолютно непрерывной функцией двух переменных (x,y), если $\varphi(\delta)$, определяемая формулой (53) (см. [11])

$$\varphi(\delta) = F(x_2,y_2) - F(x_1,y_2) - F(x_2,y_1) + F(x_1,y_1),$$

есть абсолютно непрерывная функция промежутков и если, кроме того, $F(c,y)$ и $F(x,d)$ – абсолютно непрерывные функции y и x.

Таким образом, всякая абсолютно непрерывная функция $F(x,y)$ может быть представлена формулой

$$F(x,y) = \int_c^x \int_d^y f(s,t)\,ds\,dt + \int_c^x g(s)\,ds + \int_d^y h(t)\,dt + F(c,d).$$

Задача. *Найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее следующим условиям:*

$$\int_0^b M(x,y)u(x,y)\,dy = \tau(x), \qquad 0 \le x \le a, \tag{3}$$

$$\int_0^a K(x,y)u(x,y)\,dx = \eta(y), \qquad 0 \le y \le b, \tag{4}$$

где $M(x,y)$, $K(x,y)$, $\tau(x)$, $\eta(y)$ *– заданные функции, причем* $M(x,y) \not\equiv 0$, $K(x,y) \not\equiv 0$.

3. Обозначения

Примем обозначения

$$W_{\mu,\nu}(x,y) = x^{\mu-1}\, y^{\nu-1} e^{\mu,\nu}_{\alpha,-\beta}\left(-\lambda x^{\alpha} y^{\beta}\right), \tag{5}$$

где

$$e^{\mu,\nu}_{\alpha,-\beta}(\mathrm{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \mu)\Gamma(\beta n + \nu)}$$

– функция типа Райта [9, с. 23].

Из определения формулы дробного дифференцирования (интегрирования) степенных функций [9, с. 15]

$$D^{\mu}_{0z} \frac{z^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)} = \frac{z^{\delta-\mu-1}}{\Gamma(\delta - \mu)}$$

следует, что для функции $W_{\mu,\nu}(x,y)$ справедливы формулы

$$D^{\varepsilon}_{0x} W_{\mu,\nu}(x,y) = W_{\mu-\varepsilon,\nu}(x,y), \qquad D^{\varepsilon}_{0y} W_{\mu,\nu}(x,y) = W_{\mu,\nu-\varepsilon}(x,y),$$

где $\varepsilon \in \mathbb{R},\ \mu > 0, \nu > 0$.

В силу этих равенств можем записать, что

$$D^{\alpha}_{0x} W_{\alpha,\beta}(x,y) = W_{0,\beta}(x,y), \qquad D^{\beta}_{0y} W_{\alpha,\beta}(x,y) = W_{\alpha,0}(x,y).$$

С помощью формулы автотрансформации [9, с. 24]

$$W_{\mu,\nu}(x,y) = -\lambda\, W_{\mu+\alpha,\nu+\beta}(x,y) + \frac{x^{\mu-1} y^{\nu-1}}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}$$

получаем, что

$$W_{0,\beta}(x,y) = -\lambda W_{\alpha,2\beta}(x,y), \tag{6}$$

$$W_{\alpha,0}(x,y) = -\lambda W_{2\alpha,\beta}(x,y). \tag{7}$$

4. Представление решения

Пусть $u(x,y)$ – регулярное решение уравнения (1). Тогда с учетом равенств (6) и (7) $u(x,y)$ можно представить в виде [8]:

$$u(x,y) = \psi(x) + \varphi(y) - \psi(0) W_{1,1}(x,y) -$$

$$-\lambda \int_0^x \psi(s) W_{\alpha,\beta+1}(x-s,y)\, ds - \lambda \int_0^y \varphi(t) W_{\alpha+1,\beta}(x,y-t) dt +$$

$$+ \int_0^x \int_0^y f(s,t) W_{\alpha,\beta}(x - s, y - t)\, dt\, ds, \tag{8}$$

где $\psi(x) = u(x,0)$, $\varphi(y) = u(0,y)$.

Чтобы определить функции $\psi(x)$ и $\varphi(y)$, воспользуемся условиями (3) и (4). Удовлетворяя представление (8) нелокальному условию (3) с учетом (5), получим

$$\psi(x)\int_0^b M(x,y)dy+\int_0^b M(x,y)\varphi(y)dy-\psi(0)\int_0^b M(x,y)W_{1,1}(x,y)dy-$$
$$-\lambda\int_0^b M(x,y)\int_0^x \psi(s)W_{\alpha,\beta+1}(x-s,y)dsdy-$$
$$-\lambda\int_0^b M(x,y)\int_0^y \varphi(t)\,W_{\alpha+1,\beta}(x,y-t)dtdy+ \tag{9}$$
$$+\int_0^b M(x,y)\int_0^x\int_0^y f(s,t)\,W_{\alpha,\beta}(x-s,y-t)dtdsdy=\tau(x).$$

Поменяв порядок интегрирования из равенства (9), получим

$$\psi(x)\int_0^b M(x,y)dy+\int_0^b M(x,y)\varphi(y)dy-\psi(0)\int_0^b M(x,y)W_{1,1}(x,y)dy-$$
$$-\lambda\int_0^x \psi(s)\int_0^b M(x,y)\,W_{\alpha,\beta+1}(x-s,y)dyds- \tag{10}$$
$$-\lambda\int_0^b \varphi(t)\int_t^b M(x,y)\,W_{\alpha+1,\beta}(x,y-t)dydt+$$
$$+\int_0^b M(x,y)\int_0^x\int_0^y f(s,t)\,W_{\alpha,\beta}(x-s,y-t)dsdtdy=\tau(x).$$

Введем обозначения:

$$\bar{M}(x)=\int_0^b M(x,y)dy,$$

$$M_1(x,s)=\int_0^b M(x,y)\,W_{\alpha,\beta+1}(x-s,y)dy,$$

$$M_2(x,t)=\int_t^b M(x,y)\,W_{\alpha+1,\beta}(x,y-t)dy,$$

$$q(x)=\tau(x)+\psi(0)\int_0^b M(x,y)W_{1,1}(x,y)dy-$$

$$-\int_0^b M(x,y)\int_0^x\int_0^y f(s,t)\,W_{\alpha,\beta}(x-s,y-t)dsdtdy.$$

С учетом сделанных обозначений из формулы (10) имеем

$$\psi(x)\bar{M}(x)-\lambda\int_0^x \psi(s)M_1(x,s)ds+$$

$$+\int_0^b M(x,y)\varphi(y)dy-\lambda\int_0^b \varphi(t)\,M_2(x,t)dt=q(x).$$

Пусть $\bar{M}(x)\neq 0$. Тогда обозначив еще

$$M_3(x,s)=\frac{M_1(x,s)}{\bar{M}(x)},\qquad M_4(x,y)=\frac{M(x,y)}{\bar{M}(x)},$$

$$M_5(x,t)=\frac{M_2(x,t)}{\bar{M}(x)},\qquad Q(x)=\frac{q(x)}{\bar{M}(x)},$$

из последнего соотношения получим

$$\psi(x)-\lambda\int_0^x \psi(s)M_3(x,s)ds+$$

$$+\int_0^b M_4(x,y)\varphi(y)dy-\lambda\int_0^b \varphi(t)\,M_5(x,t)dt=Q(x).$$

Аналогичным образом, удовлетворяя представление (8) условию (4), получаем, что

$$\varphi(y)-\lambda\int_0^y \varphi(t)K_3(y,t)\,dt+$$

$$+\int_0^a K_4(x,y)\psi(x)dx-\lambda\int_0^a \psi(s)K_5(s,y)ds=F(y),$$

где

$$F(y)=\frac{\eta(y)}{\bar{K}(y)}-\psi(0)\int_0^a K_4(x,y)W_{1,1}(x,y)dx-$$

$$-\int_0^a K_4(x,y)\int_0^x\int_0^y f(s,t)\,W_{\alpha,\beta}(x-s,y-t)dsdtdx,$$

$$\bar{K}(y)=\int_0^a K(x,y)dx,$$

$$K_1(y,t)=\int_0^a K(x,y)\,W_{\alpha+1,\beta}(x,y-t)dx,$$

$$K_2(s,y)=\int_s^a K(x,y)\,W_{\alpha,\beta+1}(x-s,y)dx,$$

$$K_3(y,t)=\frac{K_1(y,t)}{\overline{K}(y)},\qquad K_4(x,y)=\frac{K(x,y)}{\overline{K}(y)},\qquad K_5(s,y)=\frac{K_2(s,y)}{\overline{K}(y)}$$

при условии, что $\overline{K}(y)\neq 0$.

Таким образом, мы получили систему интегральных уравнений относительно неизвестных функций $\psi(x)$ и $\varphi(y)$:

$$\begin{cases} \psi(x)-\lambda\int_0^x \psi(s)M_3(x,s)ds+ \\ +\int_0^b M_4(x,y)\varphi(y)dy-\lambda\int_0^b \varphi(t)\,M_5(x,t)dt=Q(x), \\ \\ \varphi(y)-\lambda\int_0^y \varphi(t)K_3(y,t)\,dt+ \\ +\int_0^a K_4(x,y)\psi(x)dx-\lambda\int_0^a \psi(s)K_5(s,y)ds=F(y), \end{cases} \tag{11}$$

которая однозначно разрешима относительно искомых функций $\psi(x)$ и $\varphi(y)$.

Пусть $R(x,s,\lambda)$ – резольвента ядра $M_3(x,s)$, а $V(y,t,\lambda)$ резольвента ядра $K_3(y,t)$. Тогда систему (11) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \psi(x)=Q_1(x)+\lambda\int_0^x Q_1(s)\,R(x,s,\lambda)ds \\ \varphi(y)=F_1(y)+\lambda\int_0^y F_1(t)\,V(y,t,\lambda)dt, \end{cases} \tag{12}$$

где

$$Q_1(x)=Q(x)-\int_0^b M_4(x,y)\varphi(y)dy+\lambda\int_0^b \varphi(t)\,M_5(x,t)dt,$$

$$F_1(y)=F(y)-\int_0^a K_4(x,y)\psi(x)dx+\lambda\int_0^a \psi(s)K_5(s,y)ds.$$

Теорема. *Пусть $f(x,y)\in C(D)$ и представима в виде*

$$f(x,y)=D_{0x}^{\alpha-1}D_{0y}^{\beta-1}g(x,y),$$

где $g(x,y)\in L(D)$, $\eta(y)\in AC[0,b]$, $\tau(x)\in AC[0,a]$ и $M(x,y)\in L(D)$, $K(x,y)\in L(D)$. Тогда существует единственное регулярное решение уравнения (1) в области D, удовлетворяющее краевым условиям (3) и (4). Решение имеет вид

$$u(x,y)=\psi(x)+\varphi(y)-\psi(0)W_{1,1}(x,y)-$$

$$-\lambda\int\limits_0^x \psi(s)\, W_{\alpha,\beta+1}(x-s,y)ds-\lambda\int\limits_0^y \varphi(y)\, W_{\alpha+1,\beta}(x,y-t)dt+$$

$$+\int\limits_0^x\int\limits_0^y f(s,t)W_{\alpha,\beta}(x-s,y-t)dtds, \tag{13}$$

где $\varphi(y)$ и $\psi(x)$ *являются решением системы (12).*

5. Доказательство

Подставляя найденные значения $\psi(x)$ и $\varphi(y)$ в соотношение (9), получим, что решение имеет вид (13). Из соотношения (13), в частности, следует единственность решения $u(x,y)$ для задачи (1), (3), (4).

То, что функция $u(x,y)$, представленная в виде (13), является искомым решением для уравнения (1), следует из условий, наложенных на правую часть и краевые условия, а также из формул дифференцирования (6), (7). Это завершает доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

2. *Cascaval R.C., Eckstein E.C., Frota C.L., Goldstein J.A.* Fractional telegraph equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2002. Vol. 276. № 1. Pp. 145-159.

3. *Псху А.В.* Краевая задача для дифференциального уравнения с частными производными дробного порядка // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2002. № 1. С. 76-78.

4. *Мамчуев М.О.* Общее представление решений дробного телеграфного уравнения // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2014. Т. 16. № 2. С. 47-51.

5. *Пшибихова Р.А.* Аналог задачи Гурса для обобщенного телеграфного уравнения дробного порядка // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50. № 6. С. 839-843.

6. *Еремин А.С.* Три задачи для одного уравнения в частных дробных производных / Труды Всероссийской научной конференции «Дифференциальные уравнения и краевые задачи». Часть 3. Математическое моделирование и краевые задачи. СамГТУ. Самара. 2004. С. 94-98.

7. *Пшибихова Р.А.* Задача Гурса для дробного телеграфного уравнения с производными Капуто и с интегральным условием // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2016. № 4 (70). С. 25-29.

8. *Пшибихова Р.А.* Задача Гурса для дробного телеграфного уравнения с производными Капуто // Математические заметки. 2016. Т. 99. № 4. С. 559-563.

9. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.

10. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Math. Stud. 204. Elsevier. Amsterdam, 2006.

11. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 5. М.: Физматгиз, 1959.

REFERENCES

1. Nakhushev A.M. *Drobnoye ischisleniye i yego primeneniye* [Fractional calculus and its application]. M.: Fizmatlit, 2003. 272 p.

2. *Cascaval R.C., Eckstein E.C., Frota C.L., Goldstein J.A.* Fractional telegraph equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2002. Vol. 276. № 1. Pp. 145-159.

3. Pskhu A.V. *Krayevaya zadacha dlya differentsial'nogo uravneniya s chastnymi proizvodnymi drobnogo poryadka* [A boundary value problem for a fractional differential equation with partial derivatives] // News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences. 2002, No. 1. Pp. 76-78.

4. Mamchuev M.O. *Obshcheye predstavleniye resheniy drobnogo telegrafnogo uravneniya* [General representation of solutions of the fractional telegraph equation] // Reports of Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences. 2014, T. 16. No. 2. Pp. 47-51.

5. Pshibikhova R.A. An analogue of the Goursat problem for a generalized telegraph equation of fractional order // Differential equations. 2014. V. 50. No. 6. Pp. 839-843.

6. Eremin A.S. *Tri zadachi dlya odnogo uravneniya v chastnykh drobnykh proizvodnykh / Trudy Vserossiyskoy nauchnoy konferentsii «Differentsial'nyye uravneniya i krayevyye zadachi». Chast' 3. Matematicheskoye modelirovaniye i krayevyye zadachi* [Three problems for a single partial fractional equation, Proceedings of the All-Russian Scientific Conference, Differential equations and boundary value problems. Part 3. Mathematical modeling and boundary value problems]. Samara State Technical University. Samara 2004. Pp. 94-98.

7. Pshibikhova R.A. *Zadacha Gursa dlya drobnogo telegrafnogo uravneniya s proizvodnymi Kaputo i s integral'nym usloviyem* [The Goursat problem for a fractional telegraph equation with Caputo derivatives and with an integral condition] // News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences. 2016. No. 4 (70). Pp. 25-29.

8. Pshibikhova R.A. The Goursat problem for a fractional telegraph equation with Caputo derivatives // Mathematical Notes 2016. Vol. 99. No. 4. Pp. 559-563.

9. Pskhu A.V. *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka* [Partial differential equations of fractional order]. M.: Science, 2005. 199 p.

10. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Math. Stud. 204. Elsevier. Amsterdam, 2006.

11. Smirnov V.I. *Kurs vysshey matematiki* [Course in higher mathematics]. V. 5. M.: Fizmatgiz, 1959.

ON A NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITIONS FOR A FRACTIONAL TELEGRAPH EQUATION

R.A. PSHIBIKHOVA

Institute of Applied Mathematics and Automation –
branch of the FSBSE "Federal Scientific Center
"Kabardin-Balkar Scientific Center of the Russian Academy of Sciences"
360000, KBR, Nalchik, Shortanov street, 89 A
E-mail: ipma@niipma.ru

In this paper, we study a nonlocal boundary value problem for a generalized telegraph equation with fractional derivatives. Fractional differentiation is specified using the Caputo operator. The equation is considered in a bounded rectangular domain of the plane of two independent variables. Nonlocal boundary conditions are specified in the form of partial integral expressions from the desired solution for each of the variables with given continuous kernels. Using the previously obtained representation for the solution of the Goursat problem for the equation under study in terms of the Wright-type function, the problem under consideration can be reduced to the system of Volterra linear integral equations with respect to the traces of the desired solution on the part of the boundary of the domain. As a result, a theorem on the existence and uniqueness of a solution to the problem under study is proved; its representation is found in terms of solutions to the resulting system of integral equations.

Keywords: non-local problem, Caputo derivative, fractional telegraph equation, integral condition, Wright-type function.

Работа поступила 09.06.2020 г.