УДК 517.23
MSC 37N30, 37N40
DOI: 10.35330/1991-6639-2020-1-93-57-62

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ С ПРОИЗВОДНОЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА КАК МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ СОЛНЕЧНОЙ АКТИВНОСТИ

Д.А. ТВЁРДЫЙ

Институт прикладной математики и автоматизации –
филиал ФГБНУ «Федеральный научный центр
«Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук»
360000, КБР, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А
E-mail: ipma@niipma.ru

В работе с помощью математической модели исследуется динамика солнечной активности 23-го и 24-го циклов на стадии подъема. Математическая модель представляет собой задачу Коши для уравнения Риккати с производной дробного порядка. Решение этой математической модели дается численно с помощью метода Ньютона. Полученное решение сопоставляется с экспериментальными данными солнечной активности 23-го и 24-го циклов на стадии подъема. Далее с помощью метода наименьшего квадрата выбирается оптимальное значение порядка дробной производной, при котором коэффициент детерминации достигает максимального значения. Показано, что предложенная модель хорошо согласуется с динамикой солнечной активности 23-го и 24-го циклов в период подъема и позволяет выделить его тренд. Сделано предположение, что динамика солнечной активности на стадии подъема может обладать эффектами памяти.

Ключевые слова: дробное исчисление, наследственность, численные методы, солнечная активность, уравнение Риккати.

Введение

Исследование динамических систем с наследственностью или памятью имеет важное значение. Например, динамическим процессам с памятью (эредитарные процессы) посвящена глава в монографии [1]. Свойство памяти динамической системы заключается в зависимости текущего состояния от ее предыдущих состояний (предыстории). Эффекты в памяти обычно описываются с помощью интегро-дифференциальных (эредитарных) уравнений с разностными ядрами, которые называются функциями влияния или памяти. Такие эредитарные уравнения использовались в наследственной механике при исследовании вязко-упругих и вязко-пластичных сред [2]. Определенный интерес представляет более узкий класс эредитарных уравнений – уравнения с производными дробных порядков [3]. Уравнения с производными дробных порядков характеризуются степенной функцией памяти, что дает возможность использовать хорошо развитый математический аппарат дробного исчисления [4].

В настоящей работе предложено исследование динамики солнечной активности 23-го и 24-го циклов на стадии подъема с помощью модельного уравнения Риккати с производной дробного порядка и непостоянными коэффициентами [5, 6]. Подобные исследования уже проводились, например, в работе [7]. Однако в этой работе модельное уравнение Риккати с производной дробного порядка было с постоянными коэффициентами, а также была исследована динамика солнечной активности в период 1998-2010 гг. и установлена ее связь с селевыми потоками в Кабардино-Балкарской Республике.

Постановка задачи

Рассмотрим следующее эредитарное уравнение, которое является аналогом уравнения Риккати:

$$\int_0^t K(t-\tau)\dot{u}(\tau)d\tau + a(t)u^2(t) + b(t)u(t) + c(t) = 0, \tag{1}$$

где $K(t-\tau)$ – функция памяти, $t \in [0,T], T > 0$ – время моделирования, $u(t)$ – функция решения, $a(t), b(t), c(t)$ – коэффициенты рассматриваемого уравнения, заданные функции, $\dot{u}(t) = du/dt$.

Отметим, что если функция памяти $K(t-\tau)$ является функцией Хевисайда, то можно говорить, что процесс обладает полной памятью, если это функция Дирака, то память отсутствует. Поэтому будем рассматривать функцию памяти в виде степенной функции:

$$K(t-\tau) = \frac{(t-\tau)^{-\alpha(t)}}{\Gamma(1-\alpha(t))}, 0 < \alpha(t) < 1, \tag{2}$$

где $\Gamma(1-\alpha(t))$ – гамма-функция Эйлера.

Подставив функцию памяти (2) в эредитарное уравнение (1), получим следующее интегро-дифференциальное уравнение, называемое эредитарным уравнением Риккати:

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha(t))}\int_0^t \frac{\dot{u}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha(t)}}d\tau + u^2(t) - 1 = 0. \tag{3}$$

В уравнении (3) введем следующее обозначение:

$$\partial_{0t}^{\alpha(t)}u(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha(t))}\int_0^t \frac{\dot{u}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha(t)}}d\tau, \tag{4}$$

которое является обобщением дробной производной Герасимова-Капуто [8].

Необходимо отметить, что существуют другие определения производной дробного переменного порядка [6, 7]. Мы же остановимся на определении (4) и запишем уравнение (3) в компактной форме:

$$\partial_{0t}^{\alpha(t)}u(\tau) + a(t)u^2(t) + b(t)u(t) + c(t) = 0, u(0) = const. \tag{5}$$

Заметим, что при значении $\alpha(t) = 1$ уравнение (5) переходит в классическое уравнение Риккати с непостоянными коэффициентами.

Вследствие вышесказанного постановка задачи для эредитарного уравнения Риккати (1) в данном случае свелась к задаче Коши (5).

Методика решения

В настоящей статье мы будем рассматривать случай $\alpha(t) = \alpha = const$. Так как задача Коши (5) в общем случае не имеет точного решения, то будем использовать численные методы для ее решения. Для этого разобьем временной отрезок $t \in [0,T]$ на N равных частей, где $\tau = \frac{T}{N}$ – шаг дискретизации, и получим, что $t_k = k\tau, k = 0,\dots,N-1$, а функция решения $u(t_k) = u_k$. Аппроксимацию дробной производной (4) проведем в виде:

$$\partial_{0t}^{\alpha(t)}u(\tau) \approx \sigma_{\alpha,\tau}\sum_{i=1}^{k} \omega_{i,\alpha}(u_{k-i+1} - u_{k-i}),\ k = 1,\dots,N-1, \tag{6}$$

где весовые коэффициенты равны

$$\sigma_{\alpha,\tau} = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)},\ \omega_{i,\alpha} = i^{1-\alpha} - (i-1)^{1-\alpha}.$$

Можно показать, что аппроксимация (6) имеет первый порядок. Задачу Коши (5) перепишем в разностной постановке:

$$\sigma_{\alpha,\tau} \sum_{i=0}^{k} \omega_{i,\alpha}(u_{k-i+1} - u_{k-i}) + a_k u_k^2 + b_k u_k + c_k = 0, u_0 = const. \quad (7)$$

Получили систему нелинейных алгебраических уравнений, алгоритм решения которой был реализован в программе NSFDRE [9]. В настоящей работе решение находится методом Ньютона и реализовано в системе Maple 17.

Расчетная кривая принимает вид логистической кривой в том числе за счет особого характера поведения коэффициентов $(-1 < a < 0), (b = 0), (0 < c < 1)$ в (5), что достигается устремлением значений коэффициентов от 0 к их макс.(мин.) значениям с каждым шагом решения задачи. А именно:

$$a_k = -\frac{k}{N\frac{\sqrt{N}}{2}}, b_k = 0, c_k = \frac{k}{N\frac{\sqrt{N}}{2}}.$$

Результаты моделирования

Применим описанную модель для аппроксимации данных наблюдений за активностью текущего 24-го цикла солнечной активности в период с января 2009 г. по настоящее время, т.е. почти за 11 лет с шагом в 1 месяц. А также рассмотрим 23-й цикл, с мая 1996 г. по декабрь 2009 г. Данные по таким процессам были получены из базы World Data Center for the production, preservation and dissemination of the international sunspot number с сайта проекта Sunspot Index and Long-term Solar Observations [10].

Как ранее отмечалось, для данной задачи $\alpha(t) = \alpha = const$ на протяжении всего численного эксперимента. Значение порядка дробной производной α определяется методом наименьшего квадрата с целью получить наибольший коэффициент детерминации между решением и экспериментальными данными. В данном случае установлено, что при $\alpha = 0.5$ достигается наибольший коэффициент детерминации R^2. Для 23-го цикла (рис. 1) это $R^2 = 0.913$, а для 24-го цикла (рис. 5) это $R^2 = 0.882$.

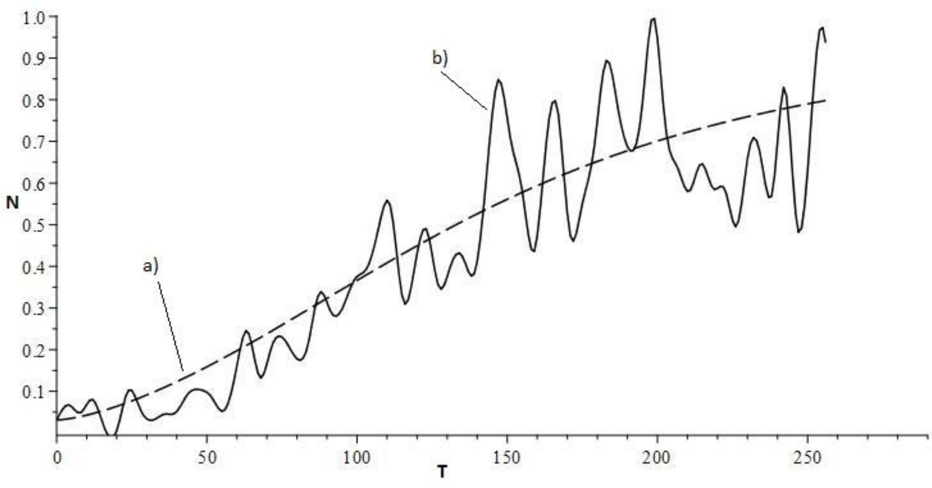

Рис. 1. *Численный эксперимент для 23-го цикла.* $N = 257,\ \tau = 1,\ \alpha = 0.5,\ u[0] = u_0 = 0.031.$ *a) – решение, b) – данные.*

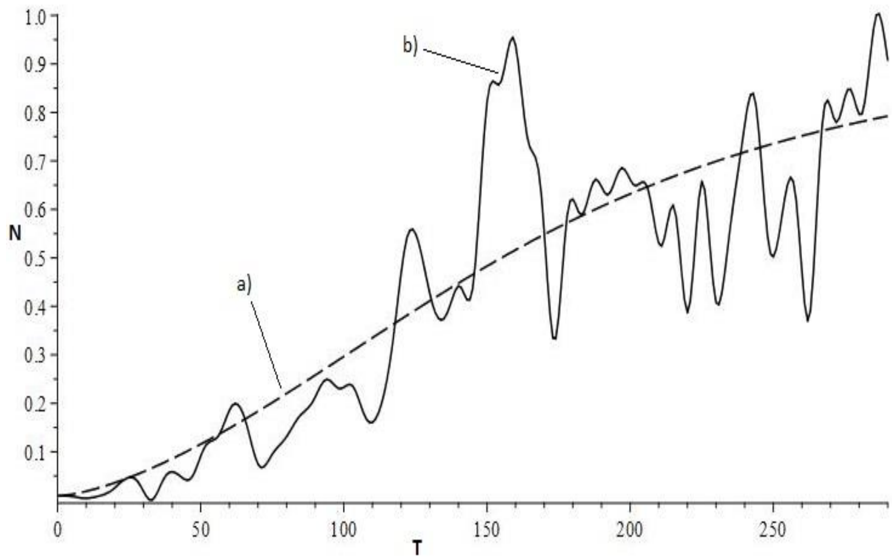

Рис. 2: *Численный эксперимент для 24-го цикла.* $N = 291,\ \tau = 1,\ \alpha = 0.5,\ u[0] = u_0 = 0.008.$
a) – решение, b) – экспериментальные данные

Заключение

В работе исследована динамика солнечной активности 23-го и 24-го циклов на стадии подъема с помощью математической модели, основанной на уравнении Риккати с производной дробного порядка и непостоянными коэффициентами. Показано, что при оптимальном выборе порядка дробной производной расчетные данные хорошо согласуются со сглаженными экспериментальными данными. Это, с одной стороны, позволяет выделить тренд, а с другой – указывает на то, что динамика солнечной активности на стадии подъема может обладать эффектами памяти.

Дальнейшее развитие работы связано с уточнением предложенной модели в случае, когда $\alpha(t)$ – произвольная ограниченная функция из диапазона от 0 до 1. Это позволит более гибко моделировать динамику солнечной активности на стадии подъема.

Работа проводилась при финансовой поддержке гранта РФФИ мол_нр № 19-31-50027 и по теме «Математическое моделирование некоторых физических процессов с помощью эредитарного уравнения Риккати».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Учайкин В.В.* Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.

2. *Герасимов А.Н.* Обобщение линейных законов деформации и их приложение к задачам внутреннего трения // АН СССР. Прикладная математика и механика. 1948. Т. 12. С. 529-539.

3. *Паровик Р.И.* Математическая модель широкого класса осцилляторов с памятью // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. Моделирование и программирование. 2018. Т. 11. № 2. С. 108-122.

4. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

5. *Твёрдый Д.А.* Задача Коши для уравнения Риккати с непостоянными коэффициентами и учетом переменной степенной памяти // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2018. 3(23). С. 148-157.

6. *Твёрдый Д.А.* Математическое моделирование некоторых логистических законов с помощью эредитарной динамической системы Риккати // Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием: в 2-х томах. Самара. 2019. Т. 1. С. 348-352.

7. *Бураев А.В.* Некоторые аспекты математического моделирования региональных проявлений солнечной активности и их связи с экстремальными геофизическими процессами // Доклады Адыгской (Черкесской) международной академии наук. 2010. Т. 12. 1. С. 88-90.

8. *Паровик Р.И.* Математическое моделирование нелинейных эредитарных осцилляторов. П-Камчатский: КамГУ им. Витуса Беринга. 2015. 137 с.

9. *Твёрдый Д.А.* Программа численного расчета задачи Коши для уравнения Риккати с производной дробного переменного порядка // Фундаментальные исследования. 2017. № 8(1). С. 98-103.

10. Данные SILSO. Королевская обсерватория Бельгии (ROB), Брюссель, 2013 г. url: http://www.sidc.be/silso/datafiles#total (accessed 10 октября 2019 г.).

REFERENCES

1. Uchajkin V.V. *Metod drobnykh proizvodnykh* [Fractional derivative method] // Artishok, Ul’janovsk. 2008. 512 p. (in Russian)

2. Gerasimov A.N. *Obobshcheniye lineynykh zakonov deformatsii i ikh prilozheniye k zadacham vnutrennego treniya* [Generalization of linear laws of deformation and their application to the problems of internal friction] // USSR Academy of Sciences. Applied mathematics and mechanics. 1948. Vol. 12. Pp. 529-539.

3. Parovik R.I. *Matematicheskaya model' shirokogo klassa ostsillyatorov s pamyat'yu* [Mathematical model of a wide class memory oscillators] // Bulletin of SUSU. Ser. Mat. Model. Progr., 2018. Vol. 11. No. 2. Pp. 108-122.

4. Nahushev A.M. *Drobnoye ischisleniye i yego primeneniye* [Fractional calculus and its application] // Fizmatlit. Moskva. 2003. 272 p.

5. Tvjordyj D.A. *Zadacha Koshi dlya uravneniya Rikkati s nepostoyannymi koeffitsiyentami i uchetom peremennoy stepennoy pamyati* [The Cauchy problem for the Riccati equation with variable power memory and non-constant coeffcients] // Bulletin of KRAUNZ. Physics and mathematics. 2018. No. 3(23). P. 148–157.

6. Tvjordyj D.A. *Matematicheskoye modelirovaniye nekotorykh logisticheskikh zakonov s pomoshch'yu ereditarnoy dinamicheskoy sistemy Rikkati* [Mathematical modeling of some logistic laws using] // Materials of the XI All-Russian Scientific Conference with international participation: in 2 volumes. Samara, 2019, Vol. 1. Pp. 348-352.

7. Buraev A.V. *Nekotoryye aspekty matematicheskogo modelirovaniya regional'nykh proyavleniy solnechnoy aktivnosti i ikh svyazi s ekstremal'nymi geofizicheskimi protsessami* [Some aspects of mathematical modeling of regional manifestations of solar activity and their relationship with extreme geophysical processes] // Reports of the Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences, 2010. Vol. 12. No. 1. Pp. 88–90.

8. Parovik R.I. *Matematicheskoye modelirovaniye nelineynykh ereditarnykh ostsillyatorov* [Mathematical modeling of nonlinear hereditary oscillators] // Kamchatka State University n.a.Vitus Bering, 2015, 187 p.

9. Tvjordy D.A. *Programma chislennogo rascheta zadachi Koshi dlya uravneniya Rikkati s proizvodnoy drobnogo peremennogo poryadka* [Program for the numerical calculation of the Cauchy problem for the Riccati equation with a derivative of fractional variable order] // Fundamental’nye issledovanija [Basic research]. 2017. No. 1(8). Pp. 98-103.

10. *Dannyye SILSO. Korolevskaya observatoriya Bel'gii (ROB)* [SILSO data, Royal Observatory of Belgium (ROB)]. Brussels, 2013. Available at: http://www.sidc.be/silso/datafiles#total(accessed 10 October 2019).

THE NONLOCAL KOSHY PROBLEM FOR THE RICCATI EQUATION OF THE FRACTIONAL ORDER AS A MATHEMATICAL MODEL OF DYNAMICS OF SOLAR ACTIVITY

D.A. TVYORDY

Institute of Applied Mathematics and Automation –
branch of the FSBSE "Federal Scientific Center
"Kabardin-Balkar Scientific Center of the Russian Academy of Sciences"
360000, KBR, Nalchik, Shortanov street, 89 À
E-mail: ipma@niipma.ru

In the work of a mathematical model, the dynamics of solar activity of 23 and 24 cycles at the stage of rise is investigated. The mathematical model is the Cauchy problem for the Riccati equation with a fractional derivative, a constant value of the order of the fractional derivative, and variable coefficients. The analysis of the initial data is presented in order to highlight the studied area. The solution to this mathematical model is presented numerically using the Newton method. The resulting solution is compared, using a cubic spline, with the experimental data of solar activity of 23 and 24 cycles. Next, using the least square method, the optimal value of the order of the fractional derivative is selected at which the coefficient of determination reaches the maximum value. It is shown that the proposed model is in good agreement with the dynamics of solar activity of 23 and 24 cycles during the rise and allows us to highlight its trend. It has been suggested that the dynamics of solar activity at the elevation stage may have memory effects.

Key word: fractional calculus, heredity, numerical methods, solar activity, Riccati equation.

Работа поступила 10.02.2020 г.