

УДК 517.98; 517.2

DOI: 10.35330/1991-6639-2020-1-93-46-56

## ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ОСЦИЛЛЯТОРА ДУФФИНГА С ПРОИЗВОДНОЙ ПЕРЕМЕННОГО ДРОБНОГО ПОРЯДКА<sup>1</sup>

В.А. КИМ<sup>1,2,3</sup>, Р.И. ПАРОВИК<sup>3,4</sup>

<sup>1</sup> Камчатский государственный технический университет  
683003, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Ключевская, 35  
E-mail: kamchatgtu@kamchatgtu.ru

<sup>2</sup> Институт прикладной математики и автоматизации –  
филиал ФГБНУ «Федеральный научный центр  
«Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук»  
360000, КБР, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А  
E-mail: ipma@niipma.ru

<sup>3</sup> Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга  
683032, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4  
E-mail: kamgu.ru

<sup>4</sup> Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН  
684034, Камчатский край, Елизовский район, с. Паратунка, ул. Мирная, 7  
E-mail: www.ikir.ru

*В работе проведено исследование математической модели осциллятора типа Дуффинга с производной переменного дробного порядка Римана-Лиувилля. С помощью метода гармонического баланса были найдены алгоритмы построения амплитудно-фазовых характеристик. Были построены, амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики. Показана обратная зависимость добротности от порядка дробной производной. Построены поверхности добротности в зависимости от частоты и амплитуды.*

**Ключевые слова:** производная Римана-Лиувилля, производная Грюнвальда-Летникова, осциллограммы, фазовые траектории, амплитудно-частотная характеристика (АЧХ), фазо-частотная характеристика (ФЧХ).

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время широкое развитие получило одно из научных направлений нелинейной динамики – дробная динамика [1]. Она изучает наследственные (эредитарные) свойства динамических систем [2]. Эредитарность (память) – это свойство динамической системы, при котором текущее ее состояние зависит от конечного числа предыдущих состояний. Как показано в работе [3], свойство памяти можно описать с помощью математического аппарата дробного исчисления или с помощью операторов дробной производной. Операторы дробных производных имеют много определений и обладают уникальными свойствами, но все они в той или иной степени описывают эффект памяти, характеризующий информацию о предыдущих состояниях системы. Этот эффект предопределяет дополнительные степени свободы – порядки дробных производных. Такие многопараметрические динамические системы имеют определенные трудности в описании и требуют специальных методов исследования для обнаружения хаотических режимов [2-4].

<sup>1</sup> Исследование выполнено при поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-50033

В работе [5] был рассмотрен осциллятор типа Дуффинга с производной постоянного дробного порядка в диссипативном члене. Было найдено численное решение и построены фазовые траектории, которые выходили на регулярный или хаотический режимы. С помощью метода гармонического баланса построены амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики.

В работах [10-12, 15-18] исследованы регулярные и хаотические режимы с помощью сечений Пуанкаре и спектра максимальных показателей Ляпунова.

В настоящей работе мы продолжим изучать вынужденные колебания осциллятора типа Дуффинга, но теперь порядок дробной производной будет меняться во времени.

#### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ

Рассмотрим следующую задачу Коши [5]:

$$\ddot{x}(t) + 2\lambda D_{0t}^{q(t)} x(\tau) + \omega_0^2 x(t) + bx^3(t) = \delta \cos(\omega t), \quad x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y_0, \quad (1)$$

где  $x(t) \in C^2(0, T)$  – функция решения,  $\ddot{x}(t) = d^2x(t)/dt^2$ ,  $\dot{x}(t) = dx/dt$ ,  $\lambda$  – коэффициент трения,  $\delta$  и  $\omega$  – амплитуда и частота внешнего периодического воздействия,  $\omega_0^2$  – собственная частота системы,  $b$  – коэффициент изохронности,  $x_0, y_0$  – заданные константы, определяющие начальные условия,  $0 < q(t) < 1$  – непрерывная функция,  $t \in [0, T]$  – время,  $T > 0$  – время моделирования.

Оператор  $D_{0t}^{q(t)} x(\tau)$  в модельном уравнении (1) имеет вид:

$$D_{0t}^{q(t)} x(\tau) = \frac{1}{\Gamma(q(t))} \int_0^t x(\tau) (t-\tau)^{q(t)-1} d\tau. \quad (2)$$

Оператор дробной производной (2) будем называть оператором производной дробного переменного порядка  $q(t)$  типа Римана-Лиувилля.

Переменный порядок  $q(t)$  дробной производной типа Римана-Лиувилля определяет интенсивность диссипации энергии в колебательной системе и связан со свойствами среды, в которой происходит колебательный процесс. В случае, когда этот порядок является константой и равен единице, задача Коши (1) переходит в задачу Коши для классического осциллятора Дуффинга.

Рассмотрим зависимость амплитуды  $A$  и фазы  $\varphi$  установившихся колебаний для оператора (2) от частоты внешней силы  $\omega$ . Для вычисления АЧХ и ФЧХ используем метод гармонической линеаризации [5, 17].

Рассмотрим задачу Коши (1). Решение ищем в виде:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) = A \cos(U). \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
 D_{0t}^{q(t)} x(\tau) &= \frac{1}{\Gamma(1-q(t))} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{q(t)}} = \left| \begin{matrix} v = t - \tau \\ dv = -d\tau \end{matrix} \right| = \frac{1}{\Gamma(1-q(t))} \frac{d}{dt} \int_0^t v^{-q(t)} x(t-v) dv = \\
 &= -\frac{A}{\Gamma(1-q(t))} \frac{d}{dt} \int_0^t v^{-q(t)} \cos(\omega(t-v) + \varphi) dv = \\
 &= -\frac{A}{\Gamma(1-q(t))} \frac{d}{dt} \int_0^t v^{-q(t)} [\cos(\omega t - \omega v) \cos(\varphi) - \sin(\omega t - \omega v) \sin(\varphi)] dv = \\
 &= -\frac{A \cos(\varphi)}{\Gamma(1-q(t))} \frac{d}{dt} \int_0^t v^{-q(t)} \cos(\omega t - \omega v) dv + \frac{A \sin(\varphi)}{\Gamma(1-q(t))} \frac{d}{dt} \int_0^t v^{-q(t)} \sin(\omega t - \omega v) dv = \\
 &= -\frac{A \cos(\varphi)}{\Gamma(1-q(t))} \frac{d}{dt} (\cos(\omega t) \int_0^t v^{-q(t)} \cos(\omega v) dv) - \frac{A \cos(\varphi)}{\Gamma(1-q(t))} \frac{d}{dt} (\sin(\omega t) \int_0^t v^{-q(t)} \sin(\omega v) dv) + \\
 &+ \frac{A \sin(\varphi)}{\Gamma(1-q(t))} \frac{d}{dt} (\sin(\omega t) \int_0^t v^{-q(t)} \cos(\omega v) dv) - \frac{A \sin(\varphi)}{\Gamma(1-q(t))} \frac{d}{dt} (\cos(\omega t) \int_0^t v^{-q(t)} \sin(\omega v) dv) = \\
 &= \frac{A \omega \sin(\omega t + \varphi)}{\Gamma(1-q(t))} \int_0^t v^{-q(t)} \cos(\omega v) dv - \frac{A \omega \cos(\omega t + \varphi)}{\Gamma(1-q(t))} \int_0^t v^{-q(t)} \sin(\omega v) dv - \\
 &- \frac{A \cos(\omega t + \varphi)}{\Gamma(1-q(t))} \frac{d}{dt} \int_0^t v^{-q(t)} \cos(\omega v) dv - \frac{A \sin(\omega t + \varphi)}{\Gamma(1-q(t))} \frac{d}{dt} \int_0^t v^{-q(t)} \sin(\omega v) dv \tag{4}
 \end{aligned}$$

В случае установившихся колебаний при  $t \rightarrow \infty$  интегралы в (4) запишем в виде:

$$I_{\sin} = \int_0^{\infty} v^{-q(t)} \sin(\omega v) dv = \frac{\Gamma(1-q(t))}{\omega^{1-q(t)}} \cos\left(\frac{q(t)\pi}{2}\right) \tag{5}$$

$$I_{\cos} = \int_0^{\infty} v^{-q(t)} \cos(\omega v) dv = \frac{\Gamma(1-q(t))}{\omega^{1-q(t)}} \sin\left(\frac{q(t)\pi}{2}\right). \tag{5.1}$$

Подставив (5.1) и (5) в (4), получим

$$\begin{aligned}
 D_{0t}^{q(t)} x(\tau) &= A \omega^{q(t)} \sin(\omega t + \varphi) \sin\left(\frac{q(t)\pi}{2}\right) - A \omega^{q(t)} \cos(\omega t + \varphi) \cos\left(\frac{q(t)\pi}{2}\right) - \\
 &- A \frac{dq}{dt} \omega^{q(t)-1} \cos(\omega t + \varphi) \left[ (\ln(\omega) - \psi(1-q(t))) \sin\left(\frac{q(t)\pi}{2}\right) + \frac{\pi \cos\left(\frac{q(t)\pi}{2}\right)}{2} \right] - \\
 &- A \frac{dq}{dt} \omega^{q(t)-1} \sin(\omega t + \varphi) \left[ (\ln(\omega) - \psi(1-q(t))) \cos\left(\frac{q(t)\pi}{2}\right) + \frac{\pi \sin\left(\frac{q(t)\pi}{2}\right)}{2} \right] \tag{6}
 \end{aligned}$$

Подставив (3) и (6) в задачу (1), учитывая, что

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi), \quad x''(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi),$$

$$x''(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi), \quad \cos^3(\omega t + \varphi) = \frac{3}{4} \cos(\omega t + \varphi) + \frac{1}{4} \cos(3\omega t + 3\varphi),$$

получим уравнение [5]:

$$\ddot{x}(t) + p\dot{x}(t) + s^2x(t) = \delta \cos(\omega t), \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = y_0, \quad (7)$$

где

$$p = -2\lambda\omega^{q(t)-1} \sin\left(\frac{q(t)\pi}{2}\right) + 2\lambda \frac{dq}{dt} \omega^{q(t)-2} \left[ (\ln(\omega) - \psi(1-q(t))) \cos\left(\frac{q(t)\pi}{2}\right) + \frac{\pi \sin\left(\frac{q(t)\pi}{2}\right)}{2} \right], \quad (8)$$

$$s^2 = \omega_0^2 - 2\lambda\omega^{q(t)} \cos\left(\frac{q(t)\pi}{2}\right) + \frac{3A^2b}{4} - 2\lambda \frac{dq}{dt} \omega^{q(t)-1} \left[ (\ln(\omega) - \psi(1-q(t))) \sin\left(\frac{q(t)\pi}{2}\right) + \frac{\pi \cos\left(\frac{q(t)\pi}{2}\right)}{2} \right], \quad (9)$$

где  $\psi(1-q(t)) = -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1-q(t)} \right)$  – дигамма функция, где  $\gamma \approx \frac{1}{2}(\sqrt[3]{10}-1)$  – постоянная Эйлера. На практике достаточно взять  $n = 50$ .

Уравнение (7) представляет собой классический линейный осциллятор, для которого с помощью метода гармонической линеаризации выведены формулы для АЧХ и ФЧХ [5, 17, 18]:

$$A = \frac{\delta}{\sqrt{(s^2 - \omega^2)^2 + p^2\omega^2}} \quad (10)$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{p\omega}{s^2 - \omega^2}\right). \quad (11)$$

Добротность для дробного осциллятора Дуффинга можно определить из уравнения (5) по формуле [5, 6, 17]:

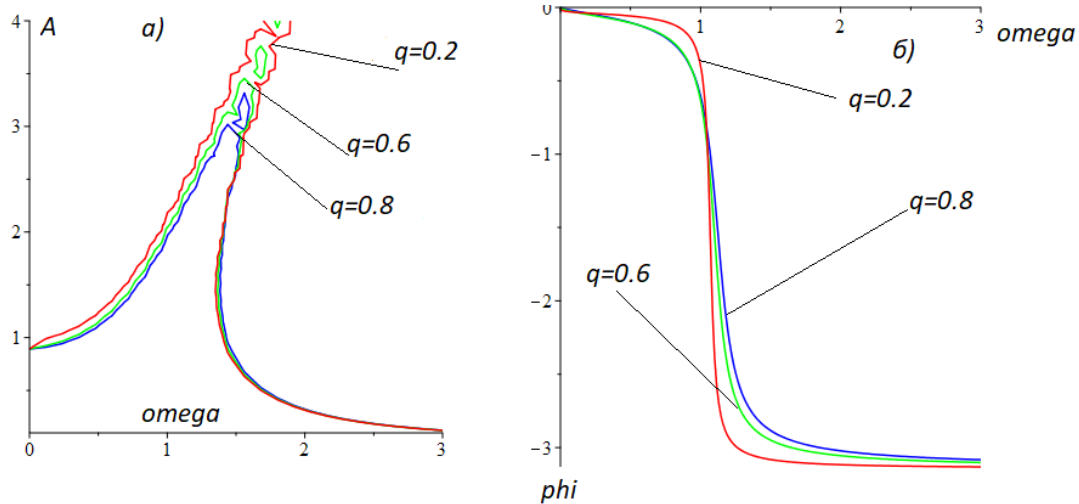
$$Q = \frac{s}{p}, \quad (12)$$

где  $s$  и  $p$  определяются равенствами (8) и (9).

РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

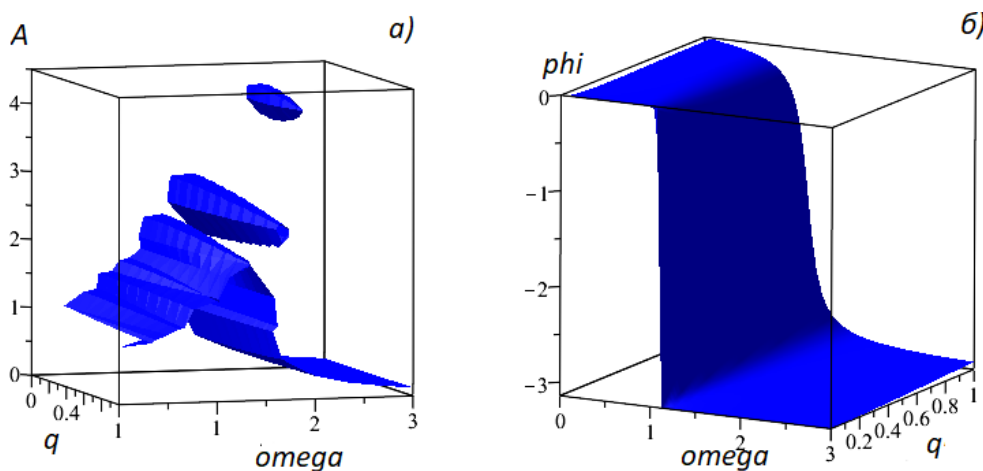
**Пример 1.** Рассмотрим случай:

$$N = 3000, T = 100, \lambda = 0.1, \delta = 1, \quad \omega = 1.5, \omega_0^2 = 1, b = 0.2, x_0 = 0.3, y_0 = 0.5.$$



**Рис. 1.** а) АЧХ и б) ФЧХ при  $A=1.5$  для оператора (2) с порядком при  $q=0.2, q=0.6$  и  $q=0.8$ .

На рисунке 1 изображены резонансные кривые АЧХ и ФЧХ, полученные по формулам (10), (11). АЧХ характеризует резонансную кривую, которая имеет резонансные частоту и амплитуду  $\omega_R, A_R$ , которые можно найти по формуле  $\frac{dA}{d\omega} = 0$ . ФЧХ или фазовый сдвиг  $\varphi$  – запаздывание смещения  $x(t)$  по фазе внешней силы. Для осциллятора Дуффинга характерно бистабильное поведение, характеризующееся коэффициентом  $b$ . Исходя из резонансных кривых, амплитуда установившихся колебаний при увеличении частоты внешней силы увеличивается до некоторого критического значения (резонансного), а затем идет резкий спад до определенного значения, затем амплитуда уменьшается. При увеличении  $q$  резонансная амплитуда уменьшается, а фазовый сдвиг  $\varphi$  отличается на небольшую величину, поэтому показатель  $q$  фактически не влияет на ФЧХ.



**Рис. 2.** а) АЧХ и б) ФЧХ при  $A=1.5$  для оператора (2) с порядком  $q \in [0, 1]$

На рисунке 2 даны АЧХ и ФЧХ с теми же параметрами, что и на рисунке 1, но здесь рассматривается зависимость амплитуды и фазы от частоты и показателя производной  $q$ , изменяющегося от 0 до 1. Это обобщение рисунка 1.

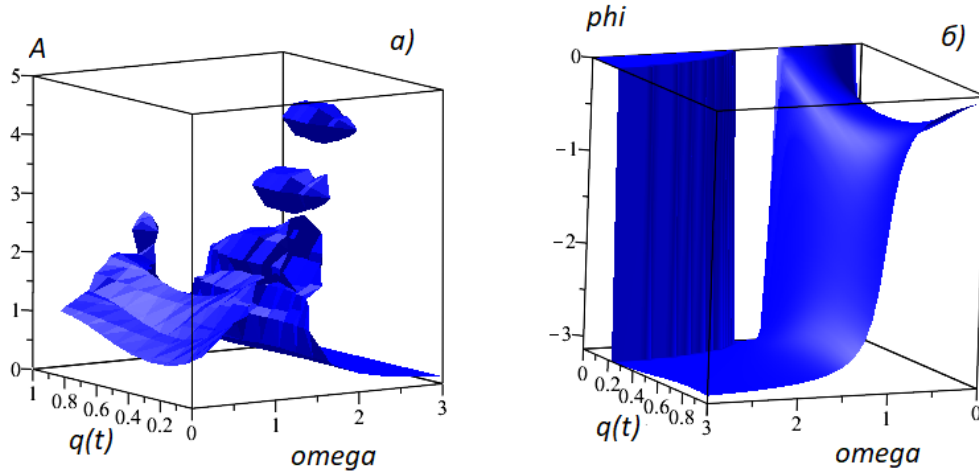


Рис. 3. а) АЧХ и б) ФЧХ при  $A=1.5$  для оператора (2) с порядком  $q(t) = \sin^2(\omega t)$ ,  $q(t) \in [0,1]$

На рисунке 3 даны АЧХ и ФЧХ с теми же параметрами, что и на рисунке 2, но здесь рассматривается изменение по закону  $q(t) = \sin^2(\omega t)$  на промежутке  $q(t) \in [0,1]$ .

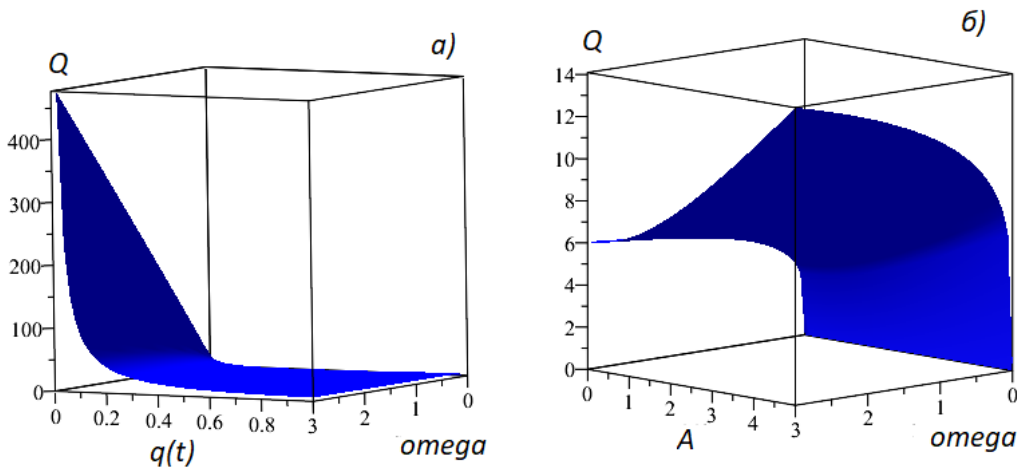


Рис. 4. Добротность: а)  $A=1.5$ , б)  $q(t) = \sin^2(\omega t)$ ,  $t = 97.4$

На рисунке 4 видно, что при уменьшении параметра  $q$  добротность увеличивается. Максимальной амплитуде соответствует максимум добротности, а при уменьшении частоты уменьшается добротность. Но сильнее всего добротность зависит от параметра  $q(t)$ .

**Пример 2.** Рассмотрим случай:

$$N = 3000, T = 100, \lambda = 0.45, \delta = 0.5, \omega = 0.75, \omega_0^2 = 1.8, b = 0.2, x_0 = 0.3, y_0 = 0.5.$$

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ОСЦИЛЛЯТОРА ДУФФИНГА  
С ПРОИЗВОДНОЙ ПЕРЕМЕННОГО ДРОБНОГО ПОРЯДКА

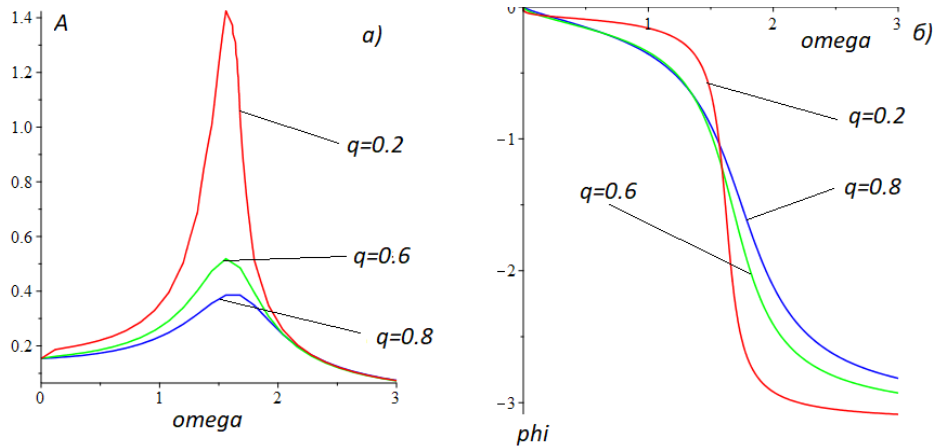


Рис. 5. а) АЧХ и б) ФЧХ при  $A=1.5$  для оператора (2) с порядком при  $q=0.2, q=0.6$  и  $q=0.8$

Амплитуда установившихся колебаний при увеличении частоты внешней силы увеличивается до некоторого критического значения, а затем плавно уменьшается. При увеличении  $q$  резонансная амплитуда уменьшается, а фазовый сдвиг  $\phi$  изменяется более плавно, при  $q=0.2$ , когда частота приближается к резонансной, идет резкий скачок фазы, а при  $q=0.8$  такого скачка нет.

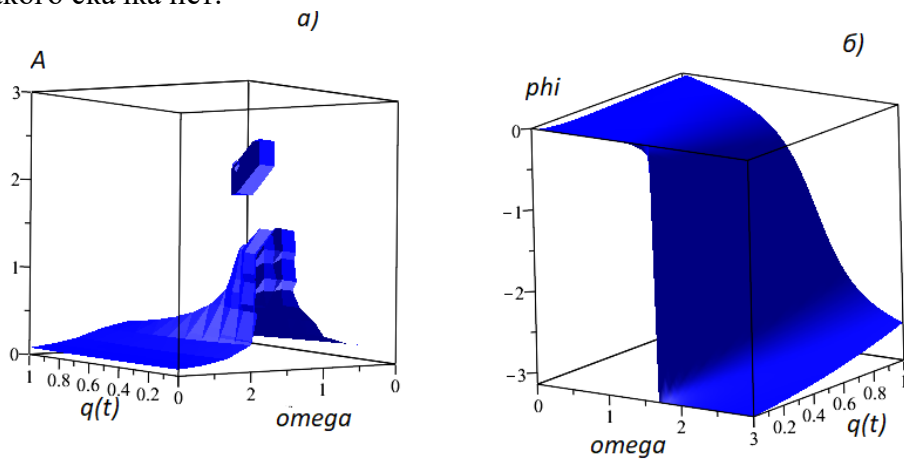


Рис. 6. а) АЧХ и б) ФЧХ при  $A=1.5$  для оператора (2) с порядком  $q \in [0,1]$

На рисунке 6 даны АЧХ и ФЧХ с теми же параметрами, что и на рисунке 5, но здесь рассматривается зависимость амплитуды и фазы от частоты и показателя производной  $q$ , изменяющегося от 0 до 1.

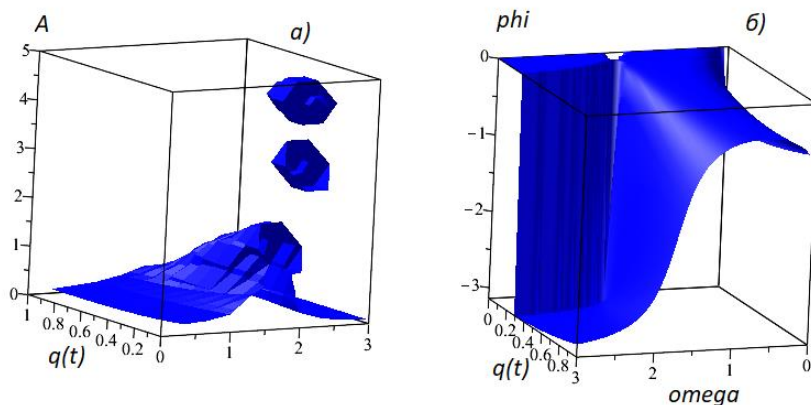


Рис. 7. а) АЧХ и б) ФЧХ при  $A=1.5$  для оператора (2) с порядком  $q(t) = \sin^2(\omega t)$ ,  $q(t) \in [0,1]$

На рисунке 7 даны АЧХ и ФЧХ с теми же параметрами, что и на рисунке 6, но здесь рассматривается изменение  $q(t) = \sin^2(\omega t)$  на промежутке  $q(t) \in [0,1]$ .

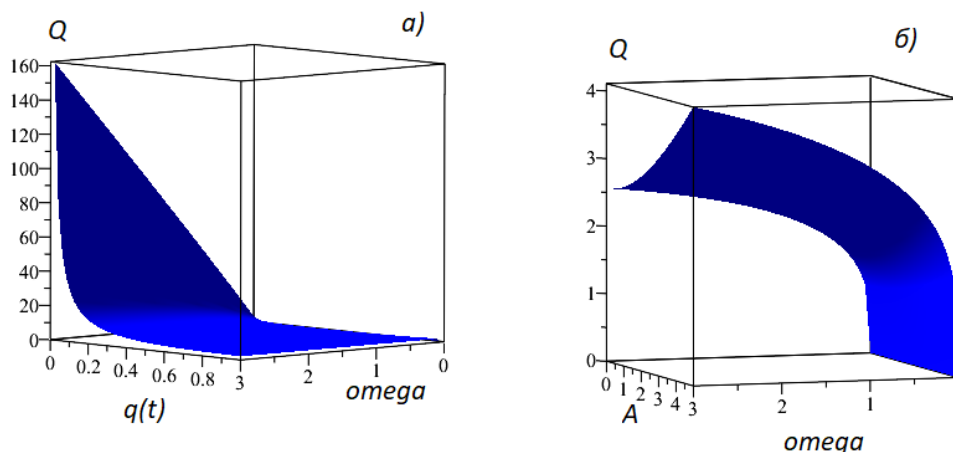


Рис. 8. Добротность: а)  $A = 1.5$ , б)  $q(t) = \sin^2(\omega t), t = 97.4$

На рисунке 8 видно, что при уменьшении параметра  $q(t)$  добротность увеличивается. Максимальной амплитуде соответствует максимум добротности, а при уменьшении частоты уменьшается добротность. Но сильнее всего добротность зависит от параметра  $q(t)$ .

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе предложена математическая модель, которая характеризует осциллятор Дуффинга с производной переменного дробного порядка в смысле Римана-Лиувилля. Были построены резонансные кривые АЧХ и ФЧХ, показывающие зависимость амплитуды и сдвига установившихся колебаний от частоты внешнего воздействия. Также были построены поверхности добротности относительно амплитуды и частоты. Было показано, что при определенных значениях частоты осциллятор Дуффинга демонстрирует бистабильное поведение, другими словами, для него характерны скачки амплитуды. Также показано, что при уменьшении дробного порядка добротность увеличивается, максимальному значению амплитуды соответствует максимальное значение добротности.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. A. Syta *et al.* Chaotic vibrations of the Duffing system with fractional damping // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2014. vol. 24, no. 1. P. 10-16.
2. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 296 с.
3. Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.
4. Kim V.A. Duffing oscillator with external harmonic action and variable fractional Riemann-Liouville derivative characterizing viscous friction // Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences. 2016. Vol. 13, № 2. P. 46-49.
5. Паровик Р.И. Хаотические и регулярные режимы дробных осцилляторов: монография. Претроравловск-Камчатский: КамГУ им. Витуса Беринга. 2019. 132 с.
6. Паровик Р.И. Математическое моделирование нелокальной колебательной системы Дуффинга с фрактальным трением // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2015. №. 1 (10). С. 18-24.
7. Ким В.А. Модельное уравнение эрдитарного осциллятора Дуффинга с производной переменного дробного порядка Римана-Лиувилля, характеризующей вязкое трение // Новый университет. Технические науки. 2016. № 4-5(50-51). С. 28-31.



8. *Ким В.А.* Математическая модель нелинейного осциллятора Дуффинга с памятью // Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения: материалы Республиканской научн. конф. с участием зарубеж. ученых. г. Ташкент, 15-17 декабря 2017 г. С. 253-254.
9. *Ким В.А.* Математическое моделирование осциллятора Дуффинга с производной переменного дробного порядка // Математическое моделирование и краевые задачи: материалы XI всероссийской научной конференции с международным участием. Т. 2, г. Самара, 27-29 мая 2019 г. Самара: СамГТУ, 2019. С. 44-46.
10. *Ким В.А.* Математическое моделирование осциллятора Дуффинга с производной переменного дробного порядка // Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики: материалы V международ. научн. конф. к 80-летию Адама Маремовича Нахушева, г. Нальчик, Кабардино-Балкарская республика, 4-7 декабря 2018 г. Нальчик: Эльбрус, 2018. С. 103-104.
11. *Ким В.А., Паровик Р.И.* Расчет максимальных показателей Ляпунова для колебательной системы Дуффинга со степенной памятью // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2018. № 3(23). С. 98-105.
12. *Ким В.А.* Хаотические режимы осциллятора Дуффинга с производной переменного дробного порядка Римана-Лиувилля // Актуальные проблемы прикладной математики: материалы IV международ. научн. конф., п. Терскол, Кабардино-Балкарская Республика, 22-26 мая 2018 г. Нальчик: Эльбрус, 2018. С. 121-122.
13. *Малкин И.Г.* Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. Изд. 2-е. М., 2004. 248 с.
14. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
15. *Оседедец В.И.* Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем // Тр. Московского математического общества. 1968. Т. 19. С. 197-231.
16. *Паровик Р.И.* Конечно-разностные схемы для фрактального осциллятора с переменными дробными порядками // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2015. Т. 11, № 2. С. 88-95.
17. *Паровик Р.И.* Об исследовании устойчивости эргодического осциллятора Ван-дер-Поля // Фундаментальные исследования. 2016. № 3(2). С. 283-287.
18. *Петухов А.А., Ревизников Д.Л.* Алгоритмы численных решений дробно-дифференциальных уравнений // Вестник МАИ. 2009. Т. 16. № 6. С. 228-243.
19. *Gao X., Yu J.* Chaos in the fractional order periodically forced complex Duffing's oscillators // Chaos, Solitons & Fractals. 2005. Vol. 24, № 4. P. 97-104.
20. *Petras I.* Fractional-Order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation. New York: Springer, 2010. 180 p.
21. *Volterra V.* Leçons sur les fonctions de lignes, professées a la Sorbonne en 1912. Paris: Gauthier-Villars, 1913. 240 p.

## REFERENCES

1. A. Syta et al. Chaotic vibrations of the Duffing system with fractional damping // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2014. vol. 24, no. 1. Pp. 10-16.
2. Kuznetsov S.P. *Dinamicheskii khaos* [Dynamic chaos]. М.: Fizmatlit, 2001. 296 p.
3. Uchaikin V.V. *Metod drobnnykh proizvodnykh* [The fractional derivative method]. Ulyanovsk: Artichoke, 2008. 512 p.
4. Kim V.A. Duffing oscillator with external harmonic action and variable fractional Riemann-Liouville derivative characterizing viscous friction // Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences. 2016. Vol. 13, No. 2. Pp. 46-49.

5. Parovik R.I. *Khaoticheskiye i regulyarnyye rezhimy drobnnykh ostsillyatorov: monografiya* [Chaotic and regular modes of fractional oscillators: monograph] / R.I. Parovik. Pretropavlovsk-Kamchatsky: KamSU named after Vitus Bering, 2019. 132 p.

6. Parovik R.I. *Matematicheskoye modelirovaniye nelokal'noy kolebatel'noy sistemy Duffinga s fraktal'nym treniyem* [Mathematical modeling of a nonlocal vibrational Duffing system with fractal friction] // *Vestnik KRAUNTS. Fiziko-matematicheskkiye nauki* [KRAUNTS Bulletin. Physics and mathematics]. 2015. No. 1 (10). Pp. 18-24.

7. Kim V.A. *Model'noye uravneniye ereditarnogo ostsillyatora Duffinga s proizvodnoy peremennogo drobnogo poryadka Rimana-Liuvillya, kharakterizuyushchey vyzkoye treniye* [Model equation of the hereditary Duffing oscillator with a derivative of variable fractional order of Riemann-Liouville characterizing viscous friction] // *Novyy universitet. Tekhnicheskkiye nauki* [New University. Technical science]. 2016. No. 4–5 (50–51). Pp. 28-31.

8. Kim V.A. *Matematicheskaya model' nelineynogo ostsillyatora Duffinga s pamyat'yu* [A mathematical model of a nonlinear Duffing oscillator with memory] // *Aktual'nyye problemy differentsial'nykh uravneniy i ikh prilozheniya: materialy Respublikanskooy nauchn. konf. s uchastiyem zarubezh. uchenykh g. Tashkent* [Actual problems of differential equations and their applications: materials of the Republican scientific. conf. with the participation of abroad. scientists Tashkent]. December 15-17, 2017 Tashkent, 2017. Pp. 253-254.

9. Kim V.A. *Matematicheskoye modelirovaniye ostsillyatora Duffinga s proizvodnoy peremennogo drobnogo poryadka* [Mathematical modeling of the Duffing oscillator with a derivative of variable fractional order] // *Matematicheskoye modelirovaniye i krayevyye zadachi: m-ly XI vserossiyskoy nauchnoy konferentsii s mezhdunarodnym uchastiyem* [Mathematical modeling and boundary value problems: fields of the XI All-Russian scientific conference with international participation]. T. 2, Samara, May 27-29, 2019 Samara: SamSTU, 2019. Pp. 44-46.

10. Kim V.A. *Matematicheskoye modelirovaniye ostsillyatora Duffinga s proizvodnoy peremennogo drobnogo poryadka* [Mathematical modeling of the Duffing oscillator with a derivative of variable fractional order] // *Nelokal'nyye krayevyye zadachi i rodstvennyye problemy matematicheskoy biologii, informatiki i fiziki: materialy V mezhdunarod. nauchn. konf. k 80-letiyu Adama Maremovicha Nakhushcheva, g. Nal'chik, Kabardino-Balkarskaya respublika, 4–7 dekabrya 2018 g* [Nonlocal boundary value problems and related problems of mathematical biology, computer science, and physics: materials of the V international. scientific conf. on the occasion of the 80th anniversary of Adam Maremovich Nakhushchev, Nalchik, Kabardino-Balkarian Republic, December 4–7, 2018]. Nalchik: Elbrus, 2018. Pp. 103-104.

11. Kim V.A., Parovik R.I. *Raschet maksimal'nykh pokazateley Lyapunova dlya kolebatel'noy sistemy Duffinga so stepennoy pamyat'yu* [Calculation of the maximum Lyapunov exponents for a Duffing oscillatory system with power-law memory] // *Vestnik KRAUNTS. Fiziko-matematicheskkiye nauki* [KRAUNTS Bulletin. Physics and mathematics]. 2018. No. 3 (23). Pp. 98-105.

12. Kim V.A. *Khaoticheskiye rezhimy ostsillyatora Duffinga s proizvodnoy peremennogo drobnogo poryadka Rimana-Liuvillya* [Chaotic modes of the Duffing oscillator with a derivative of variable fractional order of Riemann-Liouville] // *Aktual'nyye problemy prikladnoy matematiki: materialy IV mezhdunarod. nauchn. konf., p. Terskol, Kabardino-Balkarskaya respublika, 22–26 maya 2018 g* [Actual problems of applied mathematics: materials of IV international. scientific conf., Terskol settlement, Kabardino-Balkarian Republic, May 22–26, 2018]. Nalchik: Elbrus, 2018. Pp. 121-122.

13. Malkin I.G. *Metody Lyapunova i Puankare v teorii nelineynykh kolebaniy* [Lyapunov and Poincare methods in the theory of nonlinear oscillations]. M.: Publ. 2, 2004. 248 p.

14. Nakhushchev A.M. *Drobnoye ischisleniye i yego primeneniye* [Fractional calculus and its application]. M.: Fizmatlit, 2003. 272 p.

15. Oseledets V.I. *Mul'tiplikativnaya ergodicheskaya teorema. Kharakteristicheskkiye pokazateli Lyapunova dinamicheskikh sistem* [Multiplicative ergodic theorem. Characteristic Lyapunov exponents of dynamical systems] // *Tr. Moscow Mathematical Society*. 1968. Vol. 19. Pp. 197-231.

16. Parovik R.I. *Konechno-raznostnyye skhemy dlya fraktal'nogo ostsillyatora s peremennymi drobnymi poryadkami* [Finite-difference schemes for a fractal oscillator with variable fractional orders] // *Vestnik KRAUNTS. Fiziko-matematicheskiye nauki* [KRAUNTS Bulletin. Physics and mathematics], 2015. Vol. 11. No. 2. Pp. 88-95.

17. Parovik R.I. *Ob issledovanii ustoychivosti ereditarnogo ostsillyatora Van-der-Polya* [On the study of the stability of the hereditary oscillator of Van der Pol] // *Fundamental'nyye issledovaniya* [Fundamental research]. 2016. No. 3 (2). Pp. 283-287.

18. Petukhov A.A., Reviznikov D.L. *Algoritmy chislennykh resheniy drobno-differentsial'nykh uravneniy* [Algorithms for numerical solutions of fractional differential equations] // *Vestnik MAI* [Bulletin of the Moscow Aviation Institute]. 2009. V. 16. No. 6. Pp. 228-243.

19. Gao X., Yu J. Chaos in the fractional order periodically forced complex Duffing's oscillators // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2005. Vol. 24, № 4. Pp. 97-104.

20. Petras I. *Fractional-Order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation*. New York: Springer, 2010. 180 p.

21. Volterra V. *Leçons sur les fonctions de lignes, professées a la Sorbonne en 1912*. Paris: Gauthier-Villars, 1913. 240 p.

## INVESTIGATION OF FORCED OSCILLATIONS OF A DUFFING OSCILLATOR WITH A VARIABLE FRACTIONAL ORDER DERIVATIVE

V.A. KIM<sup>1,2,3</sup>, R.I. PAROVIK<sup>3,4</sup>

<sup>1</sup>Kamchatka State Technical University  
683003, Petropavlovsk-Kamchatsky, st. Klyuchevskaya, 35  
E-mail: kamchatgtu@kamchatgtu.ru

<sup>2</sup> Institute of Applied Mathematics and Automation –  
branch of the FSBSE “Federal Scientific Center  
“Kabardin-Balkar Scientific Center of the Russian Academy of Sciences”  
360000, KBR, Nalchik, Shortanov street, 89 A  
E-mail: ipma@niipma.ru

<sup>3</sup> Vitus Bering Kamchatka State University  
683032, Petropavlovsk-Kamchatsky, Pogranichnaya street, 4  
E-mail: kamgu.ru

<sup>4</sup> Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS  
684034, Kamchatka Territory, Yelizovsky District, v. Paratunka, Mirnaya street, 7  
E-mail: www.ikir.ru

*A mathematical model of a Duffing type oscillator with a variable fractional derivative of the Riemann-Liouville derivative is studied. Using the harmonic balance method, algorithms for constructing amplitude-phase characteristics were found. The amplitude-frequency and phase-frequency characteristics were built. The inverse dependence of the Q factor on the order of the fractional derivative is shown. The Q-factor surfaces are constructed depending on the frequency and amplitude.*

**Keywords:** Riemann-Liouville derivative, Grunwald-Letnikov derivative, oscillograms, phase trajectories, amplitude-frequency characteristic (AFC), phase-frequency characteristic (PFC).

*Работа поступила 11.02.2020 г.*