УДК 330.42; 51-77
DOI: 10.35330/1991-6639-2020-1-93-35-45

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕРАВНОВЕСНЫХ ПРОЦЕССОВ В МОНЕТАРНОЙ ЭКОНОМИКЕ МЕТОДОМ ПОГРУЖЕНИЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ПРОЦЕСС

Х.Х. КАЛАЖОКОВ, Ф.Х. УВИЖЕВА

Институт информатики и проблем регионального управления –
филиал ФГБНУ «Федеральный научный центр
«Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук»
360000, КБР, г. Нальчик, ул. И. Арманд, 37-а
E-mail: iipru@rambler.ru

Работа посвящена решению различных модельных задач исследования неравновесных процессов в монетарной экономике методом погружения в дифференциальный процесс как эффективного инструмента теоретической и практической экономики. Постановка задачи с начальными данными для исследования неравновесных процессов в монетарной экономике осуществлена в рамках базовой модели Фридмена и Фишера и уравнений для зависимости цены от времени. Предложены различные варианты метода погружения в дифференциальный процесс в зависимости от величины значения параметров адаптации: регулярный процесс, сингулярный (тихоновский) процесс, сингулярный процесс смешанного типа и метод погружения в дробный дифференциальный процесс. После приведения задачи к безразмерным параметрам получена нелинейная задача с начальными данными для системы уравнений в частных производных гиперболического типа. Рассмотрены сингулярная модельная задача, стационарная модельная задача, модельная задача для уравнений в частных производных первого порядка, а также безразмерные системы уравнения монетарной экономики с учетом нелинейной динамики для цены. Предложенные постановки задач после погружения в дифференциальный процесс решаются стандартными методами вычислительной математики. Доказана единственность решения модельной задачи, описывающей свободные колебательные процессы в неравновесной системе с использованием специальной «потенциальной» функции.

Ключевые слова: неравновесный процесс, монетарная экономика, метод погружения в дифференциальный процесс, метод инвариантного погружения, регулярный процесс, сингулярный процесс, дробный неравновесный процесс.

Согласно современным представлениям экономико-математические модели наряду с информационными и экспертно-логическими системами являются эффективным инструментом теоретической и практической экономики [1]. Сфера экономико-математических исследований в настоящее время относится к фундаментальным основам экономических исследований, и ее развитие является необходимой предпосылкой развития экономической науки в целом. Таким образом, необходимость построения и применения математических моделей для решения задач анализа, синтеза, прогнозирования и получения новой информации относительно экономических процессов на базе учета взаимосвязи основных компонентов функционирования экономики вида «экономическая теория – экономическая политика – хозяйственная практика» стимулирует исследования, направленные на развитие экономико-математического инструментария. В результате в развитии теории математического моделирования экономических процессов наметились два основных направления.

К *первому направлению* отнесем экономико-математические модели, которые разработаны на основе предположения, что в экономике между спросом и предложением возникает равновесие за конечное время, то есть базируется на балансовом соотношении в экономике.

Второе направление составляют экономико-математические модели, которые базируются на предположении, что в экономике между спросом и предложением не возникает равновесное состояние за конечное время, и исследуют неравновесные экономические процессы [2-8]. Экономико-математические модели неравновесных процессов в экономике рассматривались в работах Гранберга (1985), Солоу (1988), Накорякова, Гасенко (2002, 2004), Tobin (1965), Занга (1999), Лебедева (1997).

Одной из наиболее актуальных и нерешенных проблем для экономики развивающихся стран является разработка такой валютно-денежной политики, которая обеспечивала бы возможности для экономического роста страны, стимулируя экономический рост и минимизируя инфляцию.

Существующие на сегодняшний день модели малоприменимы [9], так как зависимость ВВП от капитала даже для стран с развитой рыночной экономикой постоянно сокращается. Для развивающихся стран с небольшим объемом инвестиций данный подход тем более неприемлем.

Поэтому актуальным остается один из важнейших принципов монетаризма: инфляция не может продолжаться бесконечно без увеличения денежной массы, и ее регулирование – главная, хотя и не единственная функция центрального банка.

Известно, что в состоянии стабильного равновесия экономические системы бывают крайне редко, а динамика экономики стран часто рассматривается как движение от одного неравновесного состояния к другому. Достаточно разработанными собственными теоретическими приемами изучения неравновесных процессов наука, по сведениям авторов, не располагает. Это связано с тем, что существующие модели не дают качественного представления о происходящих в динамике процессах. То есть модели дают лишь возможность получать сухие числовые характеристики, а не описывают качественные показатели этих характеристик, например, такие как частота или амплитуда их колебаний, асимптоты, к которым они стремятся, и скорость затухания колебаний этих характеристик. Такие качественные показатели могут существенно расширить интерпретацию результатов экономических моделей монетарной экономики. Целью данного исследования является продвижение в направлении совершенствования данного методического аппарата.

В настоящей работе рассматриваются вопросы исследования неравновесных процессов в монетарной экономике методом погружения в дифференциальные процессы. Основная идея метода погружения связана с причинностью погружаемых уравнений по варьируемому параметру, когда решение исследуемой задачи определяется только исходя из предыдущих значений параметра уравнений и независимо от последующих. Этот метод позволяет свести краевую задачу к задаче с начальными данными, которая и обладает свойством динамической причинности и более удобна для численного решения и дальнейшего качественного анализа.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу исследования неравновесных процессов в монетарной экономике с помощью базовой модели Фридмена и Фишера, а также уравнение для зависимости цены от времени.

В области $t_0 < t < T$ евклидовой прямой независимой переменной t рассмотрим математическую постановку задачи в виде [10]:

$$\bar{u}_1(t) = \frac{v}{\bar{p}} \bar{Q}_1(t), \tag{1}$$

$$\bar{u}_2(t) = \frac{v}{\bar{p}} \bar{Q}_2(t) \ , \tag{2}$$

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{t}} = \begin{bmatrix} \bar{\gamma}(\bar{u}_2 - \bar{u}_1), \\ R[\Phi(\bar{t})], \\ \bar{r}F[\Phi(\bar{t})] + (1-\bar{r})F[\Phi(\bar{t}-1)], \\ \bar{A}exp\{\bar{r}(\bar{u}_2 - \bar{u}_1)\}, \end{bmatrix} \quad (3)$$

где

$$\Phi = \bar{r}(\bar{u}_2 - \bar{u}_1)\ , R(\Phi) = \bar{a}\Phi(1-\Phi), \quad (4)$$

$$F(\Phi) = \bar{A}\Phi\exp\,(-\Phi)\ , \bar{p}(t_0) = \bar{p}_0.$$

Третье уравнение в (3) записано для дискретного времени $t = 1,2,3, \ldots$

В задаче (1) – (4) использованы следующие обозначения:

$\bar{u}_1$ и $\bar{u}_2$ – реальные величины предложения товаров и услуг потребления соответственно;

$\bar{Q}_1$ и $\bar{Q}_2$ – номинальные денежные массы;

v – скорость обращения денег;

$\bar{p}$ – цены товаров;

$\bar{\gamma}, \bar{r}, \bar{A}, \bar{a}$ – заданные параметры.

Задача (1) – (3) представляет собой систему дифференциальных уравнений макроэкономики в частных производных гиперболического типа для совокупного потребления и предложения, являющихся функциями двух независимых переменных – времени и индекса цен. Здесь экономика стремится к равновесному состоянию в сферах предложения и потребления, но не достигает его.

Заметим, что для описания зависимости цены от времени t используются четыре варианта уравнений (3): линейное уравнение Вальраса и три варианта нелинейных уравнений для зависимости цены от времени.

Таким образом, для рассматриваемой задачи монетарной экономики получена задача с начальными данными (1) – (4), которая анализируется известными стандартными численными методами вычислительной математики.

2. Преобразование основных уравнений монетарной экономики методом погружения в дифференциальный процесс

Рассмотрим различные варианты процессов монетарной экономики от простых к более сложным. Предполагая, что при средней цене $\bar{p}$ на рынке равновесие между спросом и предложением денежной массы отсутствует, погрузим соотношения (1) и (2) в дифференциальный процесс [10-14]. Тогда для исследования динамики взаимодействия между спросом и предложением (например, в случае нестационарных процессов в экономике) получим следующие дифференциальные уравнения в частных производных:

$$\frac{d\bar{u}_1}{d\bar{t}} = \bar{\alpha}(\frac{v}{\bar{p}}\bar{Q}_1(\bar{t}) - \bar{u}_1(\bar{t})), \quad (5)$$

$$\frac{d\bar{u}_2}{d\bar{t}} = \bar{\beta}(\frac{v}{\bar{p}}\bar{Q}_2(\bar{t}) - \bar{u}_2(\bar{t})), \quad (6)$$

где $\bar{\alpha}, \bar{\beta} = const$ – параметры адаптации.

Рассмотрим теперь различные варианты метода погружения в дифференциальный процесс в зависимости от величины значения параметров $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$.

1. Если параметры $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ – малые величины, то динамический процесс (5) – (6) представляет собой регулярный процесс [15, гл. IV, с. 226-291; 16].

2. Если же параметры $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ – большие величины, тогда малые параметры $(\frac{1}{\bar{\alpha}}, \frac{1}{\bar{\beta}})$ стоят при старшей производной и дифференциальный процесс представляет собой сингулярный (тихоновский) процесс [15, гл. V, с. 292-346; 17; 18].

3. Если же параметры $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ существенно отличаются по величине, то есть, например, $\bar{\alpha} \ll \bar{\beta}$, то дифференциальный процесс представляет сингулярный процесс смешанного типа с малыми параметрами $\bar{\alpha}$ и $\frac{1}{\bar{\beta}}$.

4. Если дифференциальный процесс рассматривается с учетом процесса зависимости от предыстории или в средах с фрактальной структурой (где расстояние между двумя соседними элементами (парой точек) определяется в смысле Хевисайда), то в левых частях (5) и (6) используются производные дробного порядка, то есть

$$D^{\delta}_{0,\bar{t}}\bar{u}_1 = \bar{\alpha}(\frac{v}{\bar{p}}\bar{Q}_1 - \bar{u}_1), \tag{7}$$

$$D^{\delta}_{0,\bar{t}}\bar{u}_2 = \bar{\beta}(\frac{v}{\bar{p}}\bar{Q}_2 - \bar{u}_2), \tag{8}$$

где δ – порядок дробных производных [19], то есть в этом случае применяем метод погружения в дробный дифференциальный процесс, что даст возможность перейти от системы уравнений с дробными производными к системе уравнений с частными производными.

3. Преобразование основной задачи монетарной экономики к безразмерным величинам

Преобразование основной задачи к безразмерным величинам применимо тогда, когда известно математическое описание процесса. Разделив все независимые и зависимые переменные на некоторые их характерные значения (масштабы), осуществляем переход к безразмерным величинам. В результате математическое описание процесса приводится к безразмерному виду. При этом масштабы, а также физические константы, входящие в задачу, объединяются в безразмерные комплексы.

Для простоты дальнейших рассуждений приведем задачу (5), (6), (3) и (4) к безразмерному виду, используя характерные величины зависимых и независимых переменных. Заметим, что в соотношении (3) в рассматриваемой задаче используется первый вариант, то есть уравнение Вальраса для цены. Вводим безразмерные величины по формулам:

$$\bar{u}_1 = U_M u_1, \bar{u}_2 = U_M u_2, \bar{p} = P_M p, \bar{t} = T_M t, T_M = \frac{P_M}{\bar{\gamma} U_M}, \tag{9}$$

где U_M, P_M, T_M – масштабные (характерные) значения соответствующих величин (например, их математические ожидания). После перехода к безразмерным величинам по формулам (9) с учетом полной формулы производной функций $\bar{u}_1$ и $\bar{u}_2$ двух переменных t и p задача (3) – (6) примет вид:

Задача 1. Система уравнений вида

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + (u_2 - u_1)\frac{\partial u_1}{\partial p} = \alpha(\frac{Q_1}{\bar{p}} - u_1), \tag{10}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + (u_2 - u_1)\frac{\partial u_2}{\partial p} = \beta(\frac{Q_2}{\bar{p}} - u_2), \tag{11}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = u_2 - u_1 . \tag{12}$$

Начальные условия:

$$u_1(t_0) = u_1^0;\ u_2(t_0) = u_2^0;\ P(t_0) = P_0. \tag{13}$$

Здесь $u_1 = u_1(t,p)$, $u_2 = u_2(t,p)$ – функции двух переменных.

В безразмерной задаче (10) – (13) использованы следующие обозначения:

$$Q_1 = \frac{v\bar{Q}_1}{P_M U_M};\ Q_2 = \frac{v\bar{Q}_2}{P_M U_M};\ \alpha = \frac{\bar{\alpha} P_M}{\bar{\gamma} U_M};\ \beta = \frac{\bar{\beta} P_M}{\bar{\gamma} U_M},$$

где α и β – безразмерные параметры задачи (10) – (13).

Таким образом, задача (10) – (13) представляет собой нелинейную задачу с начальными данными для системы уравнений в частных производных гиперболического типа с параметрами α и β.

4. Некоторые постановки задач монетарной экономики

4.1. Сингулярная модельная задача

Рассмотрим модельные задачи, которые получаются из общей задачи (10)-(13) при различных упрощающих предположениях.

Предположим, что цена товара p в рассматриваемом монетарном процессе экономики не меняется, то есть p=const. В этом случае при условии, что $u_2 - u_1 \neq 0$, из уравнения Вальраса ($\frac{d\bar{p}}{d\bar{t}} = \bar{\gamma}(\bar{u}_2 - \bar{u}_1)$) следует, что $\bar{\gamma} \to 0$, и, следовательно, для неравновесных процессов имеем $\alpha \to \infty$ и $\beta \to \infty$. В этом случае неравновесный процесс описывается модельной задачей с начальными данными для системы сингулярных обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{1}{\alpha}\frac{du_1}{dt} = \frac{Q_1}{p} - u_1, \tag{14}$$

$$\frac{1}{\beta}\frac{du_2}{dt} = \frac{Q_2}{p} - u_2, \tag{15}$$

$$u_1(t_0) = u_1^0,\ u_2(t_0) = u_2^0, \tag{16}$$

где $p = const$ – заданное число.

В задаче (14) – (16) малые параметры $\frac{1}{\alpha}$ и $\frac{1}{\beta}$ состоят при старшей производной и описывают сингулярный (тихоновский) процесс (спонтанные, самоорганизующиеся социальные процессы, «системы с управлением», а также используемые и потенциально эффективные технологии управления).

Основные трудности, возникающие при численном решении задач с начальными данными указанного типа, – наличие внутренних колебательных процессов, нелинейных процессов разных масштабов, внутренних пограничных слоев и т.д., значительно влияющих на устойчивость системы

Заметим, что для сингулярно-возмущенных задач с начальными данными предложен метод асимптотического анализа решения в классической работе А.Н. Тихонова [17]. Технические вопросы построения приближенных решений тихоновских задач с начальными данными известны и рассмотрены в работах [16, 20].

4.2. Стационарная модельная задача

Стационарный вариант общей задачи для неравновесных процессов (10) – (13) после простых преобразований (деление (10) на (11)) на основе упрощающих предположений примет вид:

$$\{ \frac{\partial u_1}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial u_2} + \frac{u_2 - u_1}{u_2 - u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial u_2} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{Q_1 - u_1 \bar{p}}{\bar{p}} \cdot \frac{\bar{p}}{Q_2 - u_2 \bar{p}} \}$$

$$\frac{du_1}{du_2} = \frac{\alpha}{2\beta} \frac{Q_1 - pu_1}{Q_2 - pu_2};$$

$$\frac{dp}{dt} = u_2 - u_1 \; (u_1 \neq u_2); \tag{17}$$

$$u_1(0) = u_1^0,$$

$$u_2(0) = u_2^0;$$

$$p(t \neq 0) = p_0,$$

где $Q_2 - pu_2 \neq 0$; $\beta \neq 0$.

Задача (17) эквивалентна задаче с начальными данными для системы трех ОДУ:

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{\alpha}{\beta}(Q_1 - pu_1);$$

$$\frac{du_2}{dt} = Q_2 - pu_2; \tag{18}$$

$$\frac{dp}{dt} = u_2 - u_1;$$

$$u_1(0) = u_1^0; \; u_2(0) = u_2^0; \; p(0) = p_0.$$

Задачи (17) и (18) легко решаются численно стандартными методами, например, методом Рунге-Кутта.

4.3. Модельная задача для уравнений в частных производных первого порядка

Вычтем теперь из первого уравнения (10) второе уравнение (11) и проведем некоторые преобразования полученных результатов на основе упрощающих предположений относительно параметров ($\alpha = \beta$) задачи:

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial t}\right) + (u_2 - u_1)\left(\frac{\partial u_1}{\partial p} - \frac{\partial u_2}{\partial p}\right) = \alpha\left(\frac{Q_1}{p} - u_1\right) - \beta\left(\frac{Q_2}{p} - u_2\right),$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} - w\frac{\partial w}{\partial p} = \frac{\alpha}{p}(Q_1 - Q_2) - \alpha w.$$

Получим следующую модельную задачу для уравнений в частных производных первого порядка, описывающую приближенно динамику неравновесных процессов:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - w\frac{\partial w}{\partial p} + \alpha w - \frac{\alpha Q}{p} = 0; \tag{19}$$

$$w(0) = w_0(p);$$

где $w = u_1 - u_2$, $Q = Q_1 - Q_2$, $\alpha = \beta$, $p \neq 0$.

Заметим, что задача (19) методом характеристик эквивалентно преобразуется к задаче с начальными данными для системы двух уравнений ОДУ:

$$\frac{dw}{dt} = \alpha w - \frac{\alpha Q}{p};\ (p \neq 0);$$

$$\frac{dp}{dt} = u_2 - u_1 = -w;$$

$$w(0) = w_0, p(0) = p_0,$$

где $Q = Q_1 + Q_2$.

4.4. О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ МОНЕТАРНОЙ ЭКОНОМИКИ С ПОМОЩЬЮ «ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ» ФУНКЦИИ

Предположим, что функции u_1 и u_2 обладают свойством, что существует функция $\varphi(t,p)$, обладающая свойством

$$u_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial t}, u_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial p}. \qquad (20)$$

Равенство (20) означает существование аналога потенциальной функции. В терминах потенциальной функции уравнения (10) и (11) принимают вид:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\alpha Q_1}{p} + (u_1 - u_2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial t};$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial p} + \beta\frac{\partial\varphi}{\partial p} = \frac{\beta Q_2}{p} + (u_1 - u_2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2}.$$

Исключая из системы уравнений $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial p}$, получим:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial t} + (u_1 - u_2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial p} + \beta(u_1 - u_2)\frac{\partial\varphi}{\partial p} = \frac{\alpha Q_1}{p} + (u_1 - u_2)\frac{\beta Q_2}{p} +$$

$$+(u_1 - u_2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial p} + (u_1 - u_2)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2},$$

или

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - (u_1 - u_2)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} + \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \beta(u_1 - u_2)\frac{\partial\varphi}{\partial p} = \frac{\alpha Q_1}{p} + (u_1 - u_2)\frac{\beta Q_2}{p}.$$

Таким образом, система уравнений (10) и (11) монетарной экономики преобразована в одно уравнение в частных производных гиперболического типа на плоскости (t, p). Это уравнение может служить эффективным средством получения качественных выводов по монетарной экономике и корректной постановки различных задач экономики.

Если переписать старшие производные уравнения (20) в виде уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа, то получим:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - (u_1 - u_2)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} = 0, \qquad (21)$$

которое описывает свободные колебательные процессы в неравновесной системе. Общий интеграл уравнения (21) по формуле Даламбера имеет вид:

$$\varphi(t,p) = f_1(p+at) + f_2(p-at), \qquad (22)$$

где $a^2 = (u_1 - u_2)^2 \neq 0$, f_i $(i = 1{,}2)$ – дважды дифференцируемые функции.

Пусть начальные условия задачи для уравнения (21) имеют вид:

$$\varphi(0,p) = \varphi_0(p),\ \varphi_t(0,p) = \psi_0(p). \qquad (23)$$

Из равенств (22) и (23) находим общее решение задачи (21) и (23) по Даламберу:

$$\varphi(t,p) = \frac{\varphi_0(p+at)+\varphi_0(p-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{p-at}^{p+at} \psi_0(z)dz, \qquad (24)$$

где z – переменная интегрирования.

Таким образом, в предположении существования решения задачи (21) и (23) нашли решение этой задачи в форме (24). Эта формула доказывает единственность решения. Следовательно, формула (24) играет большую роль для качественной формулировки различных задач монетарной экономики, так как дает представление о колебательных процессах в монетарной экономике.

5. Безразмерные системы уравнения монетарной экономики с учетом нелинейной динамики для цены

Рассмотрим уравнения монетарной экономики в безразмерных величинах, когда динамика цены товаров описывается четвертым вариантом формулы (3), то есть нелинейным уравнением. Тогда основная задача с начальными данными экономики принимает вид:

Задача 2. Система уравнений:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \left(\frac{dp}{dt}\right)\frac{\partial u_1}{\partial p} = \alpha\left(\frac{Q_1}{p} - u_1\right),$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \left(\frac{dp}{dt}\right)\frac{\partial u_2}{\partial p} = \beta\left(\frac{Q_2}{p} - u_2\right),$$

$$\frac{dp}{dt} = exp\{r(u_2 - u_1)\},$$

где $\bar{A}\frac{T_M}{P_M} = 1$, $r = \bar{r}U_M$ – дополнительные безразмерные величины задачи 2.

Начальные условия:

$$u_1(t_0) = u_1^0,\ u_2(t_0) = u_2^0,\ P(t_0) = P_0.$$

Постановка задачи 2 представляет собой задачу с начальными данными для гиперболической системы дифференциальных уравнений в частных производных на плоскости *(t, p)*, решение которой также возможно известными вычислительными методами.

Заключение

Как видно, метод дифференциального погружения в принципе отличается от стандартного подхода по нахождению частных решений дифференциальных уравнений. Такой процесс преобразований позволяет установить связь решений близких задач и таким образом качественнее изучать исследуемые процессы, являясь эффективным инструментом численного анализа исследуемых процессов. В работе предложен довольно оригинальный способ применения метода погружения в дифференциальный процесс для изучения неравновесных процессов монетарной экономики. Представлены различные постановки задач монетарной экономики и показано, как, используя метод дифференциального погружения, можно преобразовать их в задачи с начальными данными, что существенно облегчает идентификацию асимптотики решений задач исследования неравновесных процессов в контексте анализа экономико-математических моделей на их основе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Клейнер Г.В.* Экономико-математическое моделирование и экономическая теория // Экономика и математические методы. 2001. Том 37. №3. С. 111-126.

2. *Гранберг А.Г.* Динамические модели народного хозяйства. М.: Экономика. 1985. 240 с.

3. *Solow R.* Growth Theory and After The American Economic Review. Vol. 78. 1988. Pp. 307-317.

4. *Накоряков В.Е., Гасенко В.Г.* Математическая модель плановой макроэкономики // Экономика и математические методы. 2002. Т. 38. № 2. С. 1-13.

5. *Накоряков В.Е., Гасенко В.Г.* Кинетическая модель инфляции // Экономика и математические методы. 2004. Т. 40. № 1. С. 129-134.

6. *Занг В.-Б.* Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории. М.: Мир. 1999. 335 с.

7. *Тобин В.Н.* Комплекс макроэкономических моделей инфляции // Экономика и математические методы. 2001. Т. 37. № 3. С. 15-29.

8. *Лебедев В.В.* Математическое моделирование социально-экономических процессов. М.: Изограф. 1997. 224 С.

9. *Малков С.Ю., Давыдова О.И., Билюга С.Э.* Макроэкономическая производственная функция: эмпирический межстрановый анализ. Анализ и моделирование мировой и страновой динамики: экономические и политические процессы. 2016. С. 7-26.

10. *Накоряков В.Е., Гасенко В.Г.* Уравнения макроэкономики в частных производных // Экономика и математические методы. 2008. Т. 44. № 3. С. 79-91.

11. *Friedman M., Schwartz A.J.* A Monetary History of the United States 1867-1960. N. Y.: 1963. Princeton University Press. 888 p.

12. *Friedman M., Schwartz A.J.* Monetary Trends in the United States and the United Kingdom: Their Relation to Income, Prices and Interest Rates. 1876-1975. Chicago: 1982. University of Chicago Press. Pp. 3-12.

13. *Dornbusch R., Fisher S.* Stopping Hyperinflations: Past and Present. 1986. Weltwirtschaftliches Archive. Vol. 122. April. Pp. 1-47.

14. *Мэнкью Н.Г.* Макроэкономика. М.: Издательство МГУ, 1994. 736 с.

15. *Моисеев Н.Н.* Математические задачи системного анализа. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1981. 488 с.

16. *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. Издание 2-е. М., 1950. 434 с.

17. *Тихонов А.Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Математический сборник. 1952. 31 (73). С. 575-586.

18. *Васильева А.Б., Бутузов Н.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 172 с.

19. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

20. *Кащенко С. А.* Асимптотические законы распределений собственных значений периодической и антипериодической краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка // Моделирование и анализ информационных систем. 2017. 24(1). С. 13-30.

REFERENCES

1. Klejner G.V. *Ekonomiko-matematicheskoe modelirovanie i jekonomicheskaja teorija* [Economic and mathematical modeling and economic theory] // Economics and mathematical methods. 2001. V. 37(3). Pp. 111-126.

2. Granberg A.G. *Dinamicheskie modeli narodnogo hozjajstva* [Dynamic models of the national economy]. M.: Economics, 1985. 240 p.

3. Solow R. Growth Theory and After. The American Economic Review. Vol. 78. 1988. Pp. 307-317.

4. Nakoryakov V.E., Gasenko V.G. *Matematicheskaja model' planovoj makrojekonomiki* [The mathematical model of planned macroeconomics] // Economics and mathematical methods. 2002. V. 38(2). Pp. 1-13.

5. Nakoryakov V.E., Gasenko V.G. *Kineticheskaja model' infljacii* [Kinetic model of inflation] // Economics and mathematical methods. 2004.Vol. 40. No. 1. Pp. 129-134.

6. Zang V.-B. *Sinergeticheskaja jekonomika* [Synergetic economy]. Time and change in nonlinear economic theory. M.: Mir. 1999. 335 p.

7. Tobin V.N. *Kompleks makrojekonomicheskih modelej infljacii* [A complex of macroeconomic inflation models] // Economics and mathematical methods. 2001. Vol. 37(3). Pp. 15-29.

8. Lebedev V.V. *Matematicheskoe modelirovanie social'no-jekonomicheskih processov* [Mathematical modeling of socio-economic processes]. M.: Isograph, 1997. 224 p.

9. Malkov S.Yu., Davydova O.I., Bilyuga S.E. *Makrojekonomicheskaja proizvodstvennaja funkcija: jempiricheskij mezhstranovyj analiz* [Macroeconomic production function: an empirical cross-country analysis]. Analysis and modeling of world and country dynamics: economic and political processes. 2016. Pp. 7-26.

10. Nakoryakov V.E., Gasenko V.G. *Uravnenija makrojekonomiki v chastnyh proizvodnyh* [Equations of macroeconomics in private derivatives] // Economics and mathematical methods. 2008. V. 44(3). Pp. 79-91.

11. Friedman M., Schwartz A.J. A Monetary History of the United States 1867-1960. N. Y.: 1963. Princeton University Press. 888 p.

12. Friedman M., Schwartz A.J. Monetary Trends in the United States and the United Kingdom: Their Relation to Income, Prices and Interest Rates. 1876-1975. Chicago: 1982. University of Chicago Press. Pp. 3-12.

13. Dornbusch R., Fisher S. Stopping Hyperinflations: Past and Present. 1986. Weltwirtschaftliches Archive. Vol. 122. April. Pp. 1-47.

14. Mankyu N.G. *Makrojekonomika* [Macroeconomics]. M.: Publishing house of Moscow State University, 1994. 736 p.

15. Moiseev N.N. *Matematicheskie zadachi sistemnogo analiza* [Mathematical problems of system analysis]. M.: Science. The main edition of the physical and mathematical literature, 1981. 488 p.

16. Golubev V.V. *Lekcii po analiticheskoj teorii differencial'nyh uravnenij* [Lectures on the analytical theory of differential equations]. 2nd edition. M., 1950. 443 p.

17. Tikhonov A.N. *Sistemy differencial'nyh uravnenij, soderzhashhie malye parametry pri proizvodnyh* [Systems of differential equations containing small parameters with derivatives] // Mathematical collection. 1952. V.31 (73). Pp. 575-586.

18. Vasilieva A.B., Butuzov N.F. *Asimptoticheskie razlozhenija reshenij singuljarno vozmushhennyh uravnenij* [Asymptotic expansions of solutions of singularly perturbed equations]. M.: Science. 1973. 172 p.

19. Nakhushev A.M. *Drobnoe ischislenie i ego primenenie* [Fractional calculus and its application]. M.: Fizmatlit, 2003. 272 p.

20. Kashchenko S. A. *Asimptoticheskie zakony raspredelenij sobstvennyh znachenij periodicheskoj i antiperiodicheskoj kraevyh zadach dlja differencial'nyh uravnenij vtorogo porjadka* [Asymptotic laws of distributions of eigenvalues of periodic and antiperiodic boundary value problems for second-order differential equations] // Modeling and analysis of information systems. 2017. 24 (1). Pp. 13-30.

THE STUDY OF NON-EQUILIBRIUM PROCESSES IN THE MONETARY ECONOMY BY IMMERSION INTO THE DIFFERENTIAL PROCESS

Kh. Kh. KALAZHOKOV, F.Kh. UVIZHEVA

Institute of Computer Science and Problems of Regional Management –
Branch of Federal public budgetary scientific establishment "Federal scientific center
"Kabardin-Balkar Scientific Center of the Russian Academy of Sciences"
360000, KBR, Nalchik, 37-a, I. Armand St.
E-mail: iipru@rambler.ru

The work is devoted to solving various model problems of studying non-equilibrium processes in the monetary economy by immersion in the differential process as an effective tool of theoretical and practical economics. The problem statement with initial data for the study of non-equilibrium processes in the monetary economy is carried out in the framework of the basic Friedman and Fisher model and equations for the dependence of price on time. Various variants of the method of immersion in a differential process are proposed depending on the value of the adaptation parameters: a regular process, a singular process (Tikhonov process), a mixed-type singular process and a method of immersion in a fractional differential process. After reducing the problem to dimensionless parameters, a nonlinear problem with initial data for a system of partial differential equations of hyperbolic type is obtained. The work considers a singular model problem, a stationary model problem, a model problem for partial differential equations of the first order, and also dimensionless systems of the equation of monetary economy taking into account nonlinear dynamics for the price. The proposed problem statements after immersion in the differential process are solved by standard methods of computational mathematics. The uniqueness of the solution of the model problem, which describes free oscillatory processes in a non-equilibrium system using a special "potential" function, is proved.

Keywords: non-equilibrium process, monetary economy, immersion method into the differential process, regular process, singular process, fractional non-equilibrium process.

Работа поступила 28.01.2020 г.