УДК 330.45
DOI: 10.35330/1991-6639-2019-6-92-122-131

КОМПЬЮТЕРНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПОТОКОВЫХ СЕТЕЙ P-го РАНГА ОПТИМАЛЬНОСТИ

В.Ч. КУДАЕВ, М.Б. АБАЗОКОВ

Институт информатики и проблем регионального управления –
филиал ФГБНУ «Федеральный научный центр
«Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук»
360000, КБР, г. Нальчик, ул. И.Арманд, 37-а
E-mail: iipru@rambler.ru

Предложен метод снижения размерности задачи синтеза потоковой сети P-го ранга оптимальности. Метод основан на построении и использовании в процессе оптимизации цепочки базовых графов (БГ), на которых происходит синтез потоковой сети минимальной стоимости, имеющих различные степени вершин, так, что синтез сети P-го ранга на плотном базовом графе (ПБГ) заменяется решением задачи синтеза на неплотном БГ (НБГ) с последующей коррекцией полученной сети на ПБГ. Проведен обширный вычислительный эксперимент, показавший эффективность предложенного метода – значения целевой функции (стоимость сети) в задаче синтеза сети P-го ранга по цепочке базовых графов и непосредственно на ПБГ различаются лишь на доли процента, а время решения задачи на компьютере снижается при этом примерно в 5 раз при построении сети 4-го ранга.

Ключевые слова: потоковая сеть, задача синтеза, экономические параметры, ранг оптимальности сети, снижение размерности задачи, цепочка базовых графов, вычислительный эксперимент.

1. Ранги экстремумов

Рассмотрим задачу минимизации вогнутой функции при линейных ограничениях, приведенных к равенствам путем введения вспомогательных переменных:

$$f(x) \to min, \tag{1}$$

$$g_i(x) = 0, \qquad i = 0, \dots, m, \tag{2}$$

$$x \in R^n, \qquad x \geq 0. \tag{3}$$

Задача (1)-(3) существенно многоэкстремальна, т.к. локальный экстремум в ней достигается почти в каждой угловой точке многогранника ограничений (2)-(3), поэтому локальный экстремум не информативен, а глобальный, как правило, недостижим за экономически оправданное время решения задачи на компьютере. В связи с этим в работах [1, 2] было введено понятие и дано определение ранга экстремума для задачи (1)-(3). Суть его состоит в следующем.

В том случае, когда фиксированы $(n - m)$ компонент вектора $x = (x_1; \dots; x_n)$, вопрос об оптимизации не возникает. Напротив, когда ни одна из компонент вектора x не фиксирована и может изменяться в пределах, определяемых системой ограничений (2), (3), решением задачи (1)–(3) является глобальный экстремум. В соответствии с этим ранг экстремума следует определять тем количеством варьируемых переменных, которое не приводит к уменьшению полученного значения целевой функции.

Определение 1. *Вектор $\tilde{x}_P$, удовлетворяющий системе (2)–(3), назовем вариацией P-го ранга вектора x, удовлетворяющего системе (2)–(3), если значение каких-либо $(n - m - P)$ его компонент совпадает со значением этих же компонент вектора x.*

Определение 2. *Вектор* x^*, *удовлетворяющий системе (2)–(3), назовем экстремумом P-го ранга задачи (1)–(3), если для любой его вариации P-го ранга* $\tilde{x}_P$ *выполняется неравенство* $f\ (x^*)\ \le\ f\ (\ \tilde{x}_P)$.

Очевидно, что экстремум $(n-m)$-го ранга является глобальным.

Градация экстремумов позволяет для задач на графах конкретизировать системный принцип оптимальности: «Любая часть оптимальной системы оптимальна (при фиксации граничных условиях с остальной сетью)» путем установления взаимосвязи между рангом экстремума, его нелокальностью и величиной частей графа, оптимизация каждой из которых необходима для получения экстремума заданного ранга.

2. Потоковая сетевая задача с вогнутой целевой функцией

Рассмотрим задачу

$$z(v) = \sum_{i,j\in D} c_{i,j}(v_{ij})\, l_{ij} \to min, \tag{4}$$

$$\sum_{i\in\Gamma_j^+} v_{ij} - \sum_{k\in\Gamma_j^-} v_{jk} = g_i, \qquad \forall j \ne 1 \in B, \qquad \sum_{j\in\Gamma_j^-} v_{1j} = Q, \qquad (5)(6)$$

$$v_{ij} \ge 0, \qquad \forall (i,j) \in D, \tag{7}$$

где $\Gamma(B;D)$ – заданный двухзвенный орграф сети; B и D – множество его вершин и дуг; $v_{ij}, c_{i,j}, l_{ij}$ – искомое значение величины потока, заданные удельная стоимость и длина (i; j)-й дуги; Q – заданный поток в сеть; g_i – заданный расход потока в -м узле сети. Целевая функция (4) отражает стоимость потока сети, ограничение (5) есть уравнение неразрывности потока, соотношение (6) говорит о том, что узел 1 является источником потока. Функция $c_{i,j}(v_{ij})$ непрерывна, строго вогнута и возрастает, $c_{i,j}(0) = 0$. В связи с сильной вогнутостью целевой функции экстремумы могут достигаться лишь в угловых точках транспортного многогранника (5)–(7), которым соответствуют остовные деревья заданного графа возможных соединений сети. Задача, как известно, является NP-полной. Для ее нелокального решения предложено несколько методов: в работе [3] – на основе метода погружения и отсечения [4], а в работе В.А. Трубина, В.С. Михалевича, Н.З. Шора [5] – на основе метода ветвей и границ. Но ни одним из методов не решена задача с большим количеством вершин и дуг графа $\Gamma(B;D)$ [6] и тем более на полном графе, содержащем $\frac{n(n-1)}{2}$ рёбер. В случае, когда каждая пара вершин (i,j) графа $\Gamma(B;D)$ соединена дугами $(i,j),(j,i)$, получим $n(n-1)$. В связи с существенной многоэкстремальностью и большой размерностью задачи (4)-(7) в работах [1],[2] было введено понятие, дано определение ранга экстремума и доказано условие ранговой оптимальности.

3. Схема метода ранговой оптимизации сети

Поскольку экстремумы (локальные, глобальные) в задаче (4)-(7) в силу строгой вогнутости целевой функции могут достигаться только в угловых точках многогранника (5)-(7), то переходу из одной угловой точки в смежную ей при поиске P-оптимальной сети соответствует на языке теории графов внесение в текущее остовное дерево Т некоторой хорды e из $\Gamma(B;D)$ и удаление инцидентной ей дуги на Т. При этом изменятся потоки только по дугам контура K_{T+e}, замыкаемого хордой e на дереве T. Такой контур назовем фрагментом 1-го ранга сети, соответствующим текущему дереву T. Каждый фрагмент 1-го ранга представляет собой связный подграф графа сети наименьшей размерности, значение переменных которой однозначно определяется значением варьируемой переменной и значениями переменных на его границе. Аналогичным образом строятся фрагменты 2-го и более высоких рангов, получаемые внесением в дерево T двух или более хорд. Замыкаемые при этом хордами контуры должны быть связным подграфом графа $\Gamma(B; D)$, т.к. оптимизация на несвязных фрагментах может быть рассмотрена по отдельности и, следовательно, имеет меньший ранг. Для того чтобы связать определение фрагмента Р-го ранга с сетью Р-го ранга, дадим следующее определение.

Определение 3. *Решение задачи (4)–(7)* $\{v_{ij}^*\}_{ij\in D}$ *назовем оптимальным по фрагментам Р-го ранга сети, если для любого фрагмента Р-го ранга сети* $\Phi_{T,P}$, *выделяемого деревом* T *на графе* $\Gamma(B; D)$, *будет выполнено неравенство*

$$\sum_{i,j\in\Phi_{T,P}} c_{i,j}\left(v_{ij}^*\right) l_{ij} \le \sum_{i,j\in\Phi_{T,P}} c_{i,j}\left(v_{ij}\right) l_{ij},$$

где $\{v_{ij}\}_{ij\in D}$ *– любое допустимое решение задачи, но такое, что* $v_{ij} = v_{ij}^*\ \forall i,j \notin \Phi_{T,P}$.

В работах [1], [2] была доказана следующая теорема.

Теорема (условие ранговой оптимальности для сетевой задачи).

1) Отличные от нуля компоненты потокораспределения $\{v_{ij}^*\}_{ij\in D}$ *сети Р-го ранга выделяют на графе* $\Gamma(B; D)$ *ориентированное остовное дерево с корнем в источнике сети.*

2) Экстремум Р-го ранга является глобальным на выпуклой линейной комбинации вершин транспортного многогранника, имеющих смежность в промежутке $[1, P]$ *к точке экстремума.*

3) Для того чтобы решение $\{v_{ij}^*\}_{ij\in D}$ *задачи (4)–(7) было экстремумом Р-го ранга, необходимо и достаточно, чтобы оно было оптимально по всем фрагментам Р-го ранга сети.*

Утверждение 2) устанавливает взаимосвязь между рангом экстремума в задаче и его нелокальнстью. Утверждение 3) является конкретизацией системного принципа оптимальности: «Любая часть оптимальной системы оптимальна (при фиксации граничных условиях с остальной сетью)».

Из условия ранговой оптимальности следует метод динамической декомпозиции сети в процессе решения задачи. Его суть в следующем.

При оптимизации 1-го ранга на очередной итерации выделяется очередная хорда (i, j) и соответствующий ей фрагмент 1-го ранга (контур сети). Проведя оптимизацию полученного фрагмента, определяем очередную независимую переменную относительно полученного решения и переходим к оптимизации соответствующего фрагмента. Процесс оптимизации 1-го ранга системы завершается при получении решения, которое не может быть улучшено внесением любой из хорд полученного остовного дерева (и соответствующей переориентации потоков).

Далее переходим к оптимизации 2-го ранга. Для этого выделяем на каждой очередной итерации очередную пару хорд и соответствующие им фрагменты 1-го ранга. В том случае, когда эти фрагменты пересекаются, формируем фрагмент 2-го ранга – объединение двух фрагментов 1-го ранга. Решаем задачу оптимизации фрагмента 2-го ранга и переходим к следующей итерации. В том случае, если фрагменты 1-го ранга не пересекаются, также переходим к следующей итерации, т.к. оптимизация фрагментов 1-го ранга по отдельности была проведена при оптимизации 1-го ранга системы.

Аналогичным образом, после проведения оптимизации (Р-1) ранга системы проводим оптимизацию Р-го ранга. Для этого формируем наборы из Р свободных переменных, объединение соответствующих фрагментов 1-го ранга которых образует связный подграф графа системы, и проводим оптимизацию таких фрагментов. Оптимизация системы прекращается при достижении оптимума Р-го ранга либо заданного времени решения задачи на компьютере.

Таким образом, метод ранговой оптимизации сетевых систем состоит в сведении оптимизации сети к оптимизации ее фрагментов Р-го ранга. Рассмотрение только связных Р-фрагментов позволяет существенно снизить размерность задачи. Дальнейшее снижение размерности может быть достигнуто за счет динамики размерности самого базового графа $\Gamma(B; D)$, на котором решается задача синтеза Р-оптимальной потоковой сети.

4. Снижение размерности задачи компьютерного проектирования Р-оптимальной потоковой сети

Ключевым моментом при оценке сложности алгоритма оптимизации Р-го ранга являются количество свободных хорд базового графа и ранг оптимизации.

Будем считать, что проверка определения лучшего Р-фрагмента сети проходит за фиксированное время. Тогда количество вариаций, которые нужно сделать, чтобы один раз пройти по списку хорд кандидатов на вставку, равно $\frac{k!}{P!(k-P)!}$, где Р – ранг оптимизации, а k – количество хорд (дуги, не входящие в начальное остовное дерево). Для плотного графа, графа с полными ячейками (см. рис. 1 б), k вычисляется по формуле $k = m - 2(n-1)$, где n – количество вершин базового графа, m – количество всех дуг базового графа.

В связи с экспоненциальным ростом количества операций (переборов) вариантов даже при условии рассмотрения только связных контуров (фрагментов) снизить существенно размерность задачи (количество переборов) при построении Р-оптимальной сети можно только за счет снижения размерности БГ. В данной работе для этого рассматриваем 2 типа БГ (рис. 1).

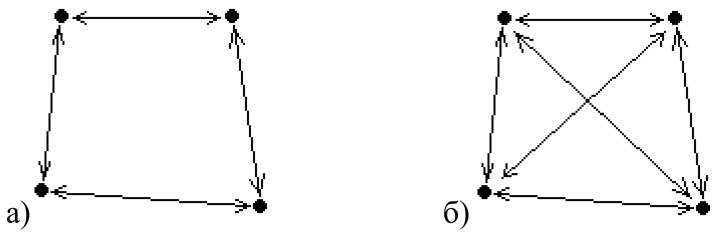

Рис. 1. *Ячейка НБГ (а) и ячейка ПБГ (б)*

БГ, имеющий ячейки с меньшим количеством связей, назовем неплотным БГ (НБГ), с большим количеством связей – плотным БГ (ПБГ). Снижение размерности задачи без утраты показателя максимальной минимизации стоимости сети достигается на основе цепочки действий, изображенной на рисунке 2.

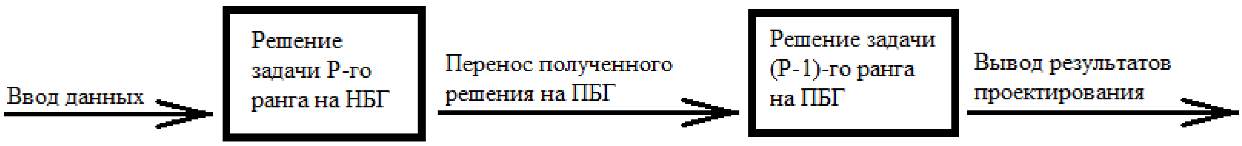

Рис. 2. *Схема укрупненного алгоритма*

При таком строении алгоритма, как показал масштабный ВЭ по компьютерному проектированию сети 4-го ранга, размерность задачи снижается ≈ на 1 ранг.

5. Вычислительный эксперимент

Проведен обширный вычислительный эксперимент (ВЭ) на идеализированном графе с $n = 100$, одинаковыми значениями расстояний между смежными вершинами, потреблением потока в вершинах и удельной стоимостью потока $c(x) = \sqrt{x}$. Вычисления проводились на ноутбуке с процессором Intel® Core™ i7 3537U.

Результаты оптимизации 4-го ранга на НБГ с начальным решением (остовным деревом «Расческа») и дальнейшая корректировка полученного решения на ПБГ представлены в таблицах 1, 2 и на рисунках 3, 4.

Таблица 1

Оптимизация	1 оптимизация	2 оптимизация	3 оптимизация	4 оптимизация
Стоимость сети до оптимизации	**264,111**	**233,894**	**233,623**	**233,623**
Количество улучшений	88	2	0	3
Улучшение	30,217	0,271	0	0,058
Время ≈ (час:мин:сек)	< 0:04:29	< 0:01:02	< 0:06:29	< 2:10:09
Стоимость сети после оптимизации	**233,894**	**233,623**	**233,623**	**233,565**

Ниже в таблице 2 представлены полученные результаты по коррекции сети 4-го ранга на ПБГ.

Таблица 2

Оптимизация	1 оптимизация	2 оптимизация	3 оптимизация
Стоимость сети до оптимизации	**233,565**	**226,142**	**226,050**
Количество улучшений	9	1	3
Улучшение	7,423	0,092	0,359
Время ≈ (час:мин:сек)	< 0:00:58	< 0:02:06	< 1:38:40
Стоимость сети после оптимизации	**226,142**	**226,050**	**225,691**

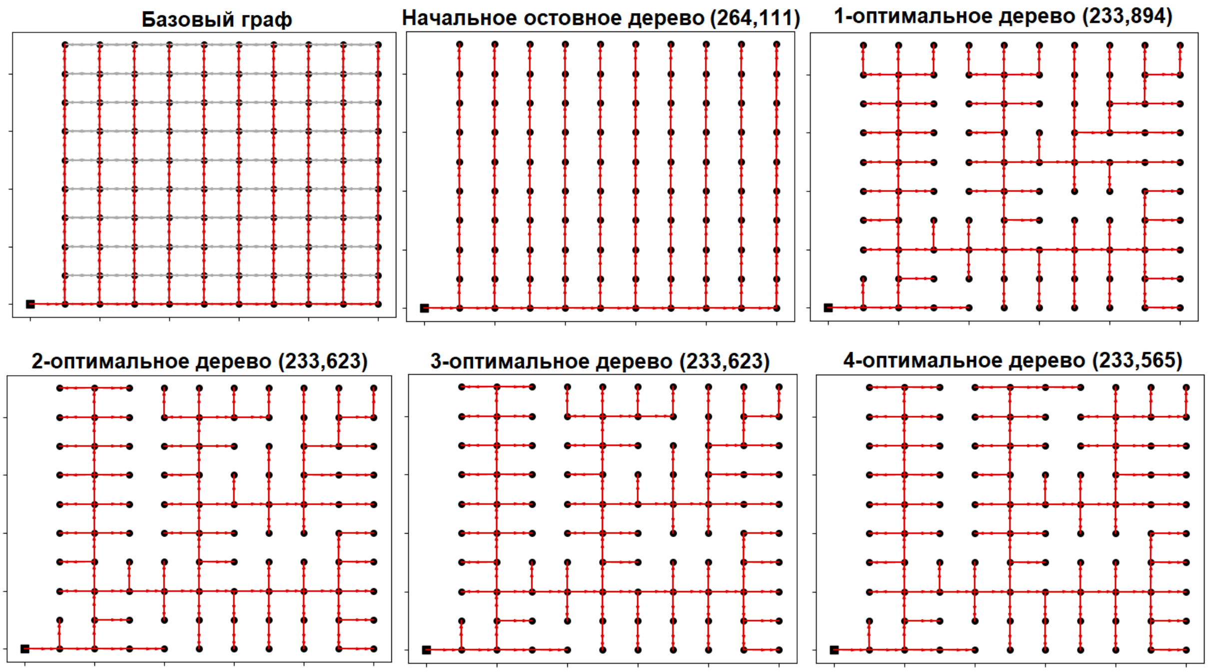

Рис. 3. *Процесс построения сети 4-го ранга на НБГ с начального остовного дерева «Расческа»*

Далее продолжаем оптимизацию, перенося решение на плотный базовый граф (граф с полными ячейками) и доводим сеть до 3 ранга оптимальности

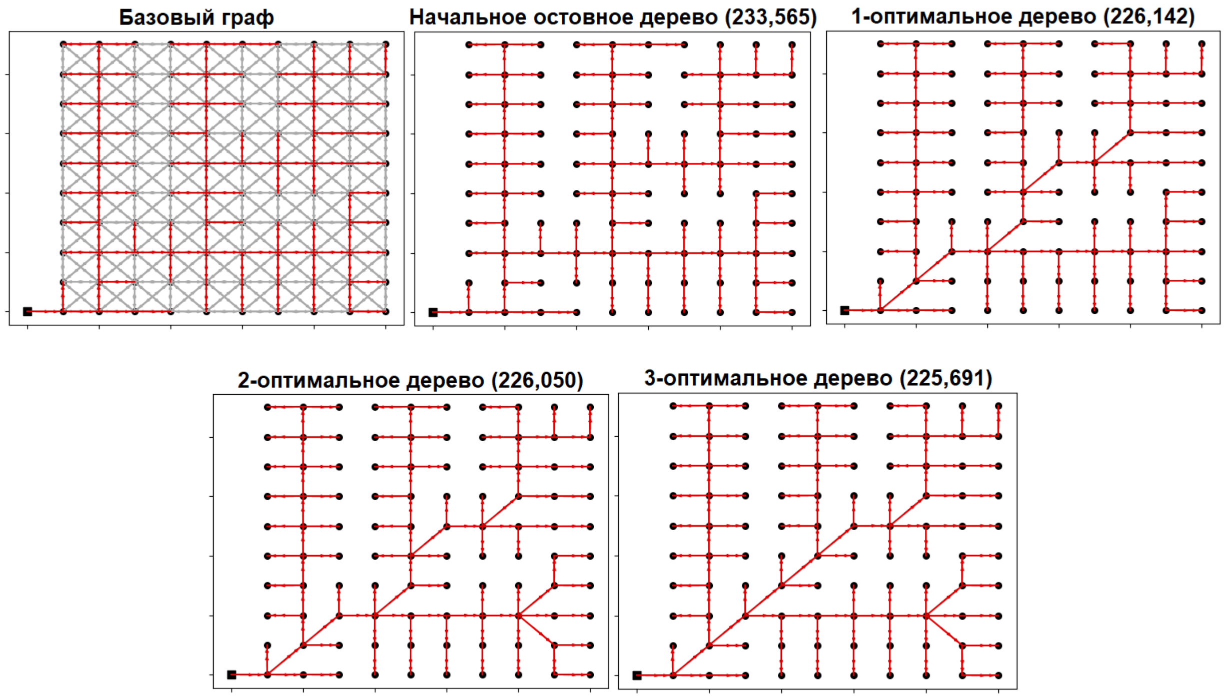

Рис. 4. *Процесс коррекции сети 4-го ранга, полученной на НБГ на ПБГ*

На графике представлен ход оптимизации для начального остовного дерева «Расческа». По оси абсцисс откладывается время, а по оси ординат – стоимость. Серыми линиями показана оптимизация 4-го ранга на НБГ, а черными линиями – оптимизация 3-го ранга на ПБГ.

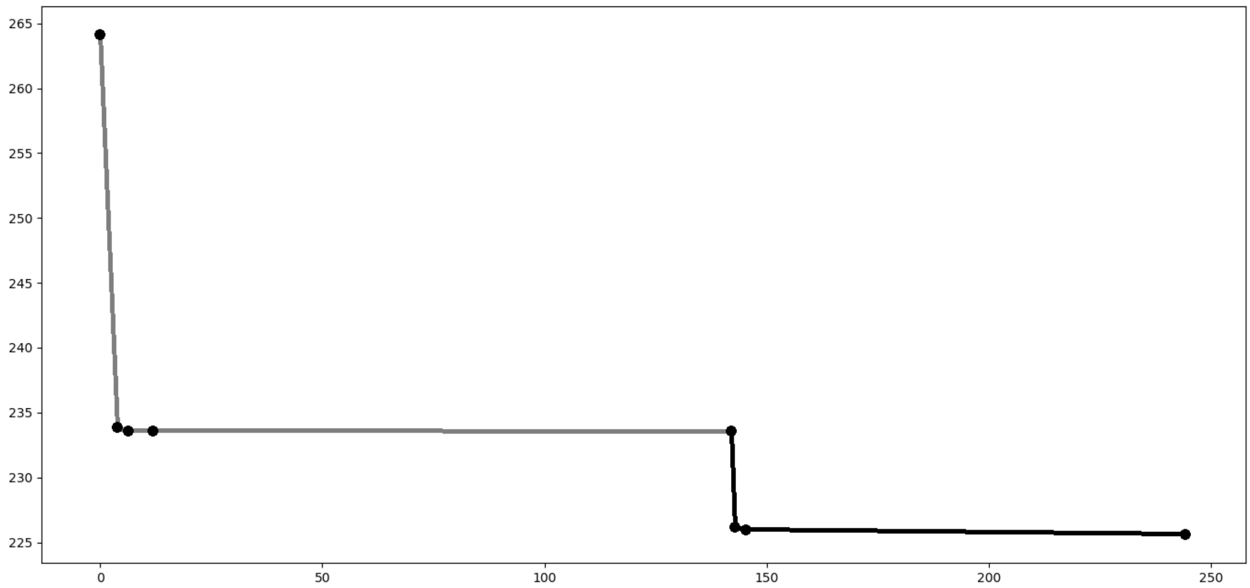

Рис. 5. *График хода оптимизации*

Для сравнения с полученным решением был также проведен вычислительный эксперимент компьютерного проектирования сети 4-го ранга непосредственно на ПБГ. При этом было получено решение, остовное дерево и стоимость которого представлены на рисунке 6.

Рис. 6.

Время решения задачи составило $t_6 = 22$ часа 15 минут, а стоимость сети $C_6 = 225{,}29$. Сравнение этого результата с полученным по схеме укрупненного алгоритма (рис. 2.) ($t_5 = 4$ часа 4 мин., $C_5 = 225{,}69$):

$$\frac{t_6}{t_5} = 5{,}47 \qquad \frac{C_6 - C_5}{C_5} * 100\% = \frac{225{,}69 - 225{,}29}{225{,}69} * 100\% = 0{,}17\%$$

показывает эффективность представленного метода снижения размерности задачи. Действительно, время построения сети 4-го ранга снизилось более чем в 5 раз, а стоимость увеличилось лишь на доли процента.

Представим теперь статистику по построению четырех сетей из различных начальных остовных деревьев («Расческа», «Лесенка», «FFF», «Змейка») 3-го ранга оптимальности по двум важнейшим показателям – стоимости сетей и времени компьютерного проектирования. На основе информации по ВЭ, представленной в таблице 1, на рисунке 3, а также в Приложении (см. в таблице 3 и на рисунках 7-9), получим:

1. Среднее значение стоимости сети 3-го ранга на НБГ:

$$C_{ср} = \frac{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}{4} = 235{,}536.$$

2. Разброс значений стоимости относительно среднего:

$$\Delta C_1 = \frac{C_{ср} - C_1}{C_{ср}} \approx 0{,}0081, \qquad \Delta C_2 = \frac{C_{ср} - C_2}{C_{ср}} \approx 0{,}0081,$$

$$\Delta C_3 = \frac{C_{ср} - C_3}{C_{ср}} \approx -0{,}0081, \qquad \Delta C_4 = \frac{C_{ср} - C_4}{C_{ср}} \approx -0{,}0081.$$

Как видно, разброс полученных значений относительно среднего мал.

3. Среднее время компьютерного проектирования сети 3-го ранга на НБГ:

$$t_{ср} = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}{4} \approx 11 \text{ мин.}$$

6. Приложение

Здесь представлена большая часть информации по проведенному вычислительному эксперименту (ВЭ). Необходимая же информация по проведенному ВЭ, отражающая суть динамического процесса оптимизации сети, представлена в пункте 5 статьи.

Таблица 3

		«Лесенка»	«FFF»	«Змейка»
С0 - начальная стоимость		**248,928**	**247,797**	**671,463**
Оптимизация 1 ранга	Количество улучшений	52	54	99
	Улучшение	15,034	10,161	433,827
	Время ≈ (час:мин:сек)	< 0:02:59	< 0:02:29	< 0:04:49
С1 - стоимость сети 1 ранга		**233,894**	**237,636**	**237,636**
Оптимизация 2 ранга	Количество улучшений	2	2	2
	Улучшение	0,721	0,187	0,187
	Время ≈ (час:мин:сек)	< 0:01:10	< 0:01:06	< 0:01:01
С2 - стоимость сети 2 ранга		**233,623**	**237,449**	**237,449**
Оптимизация 3 ранга	Количество улучшений	0	0	0
	Улучшение	0	0	0
	Время ≈ (час:мин:сек)	< 0:04:55	< 0:07:04	< 0:06:53
С3 - стоимость сети 3 ранга		**233,623**	**237,449**	**237,449**

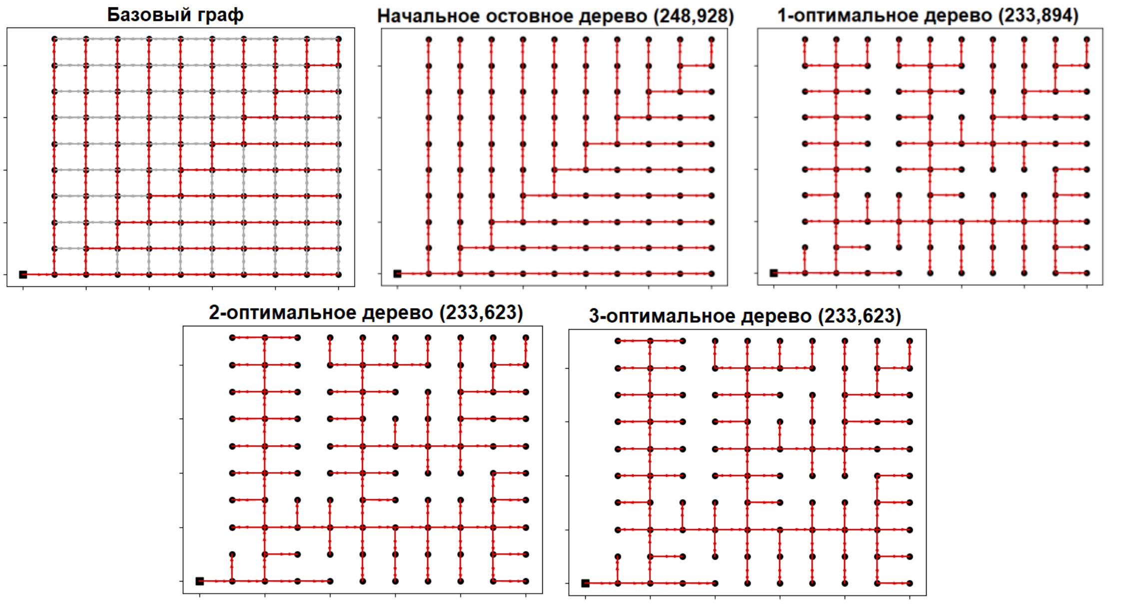

Рис. 7. *Процесс оптимизации на НБГ с начального остовного дерева «Лесенка»*

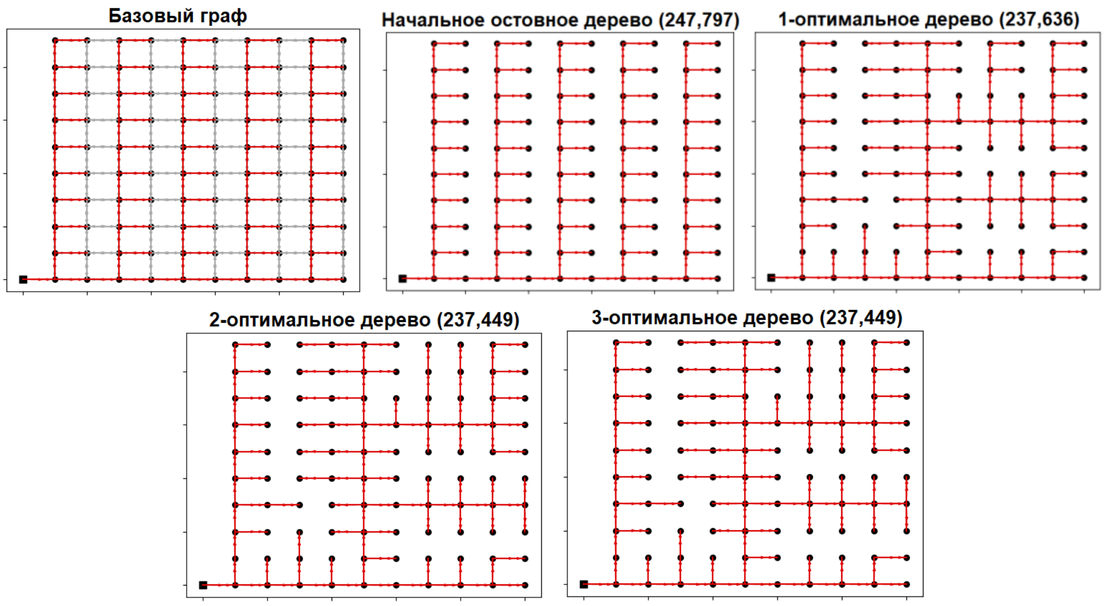

Рис. 8. *Процесс оптимизации на НБГ с начального остовного дерева «FFF»*

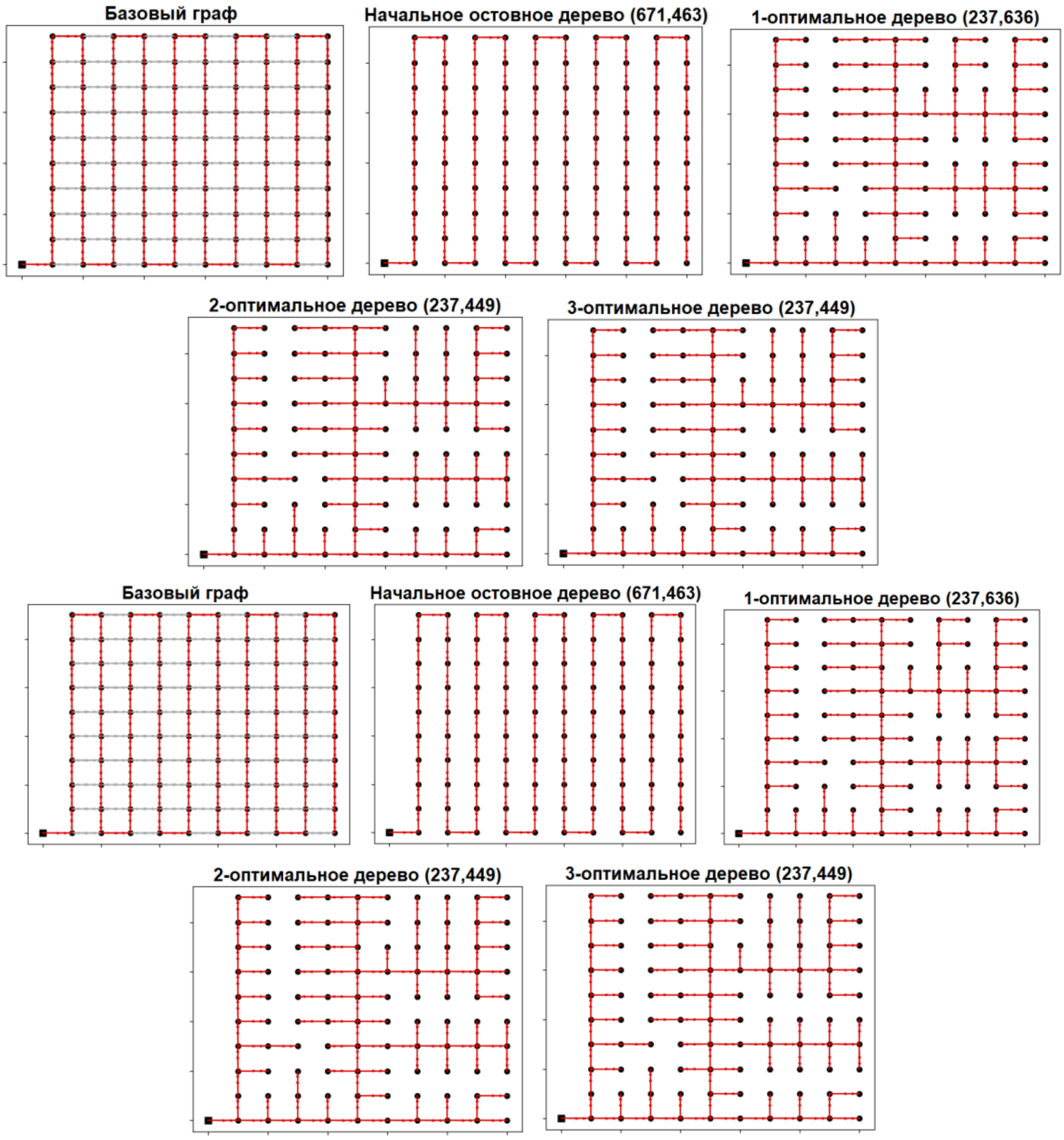

Рис. 9. *Процесс оптимизации на НБГ с начального остовного дерева «Змейка»*

Заключение

Проведённый обширный вычислительный эксперимент компьютерного проектирования оптимальных по стоимости потоковых сетей большой размерности на динамически изменяющемся базовом графе сети, существенно снижающем размерность задачи построения сети 4-го ранга, показал его эффективность. При этом время построения сети 4-го ранга сократилось более чем в 5 раз в сравнении с непосредственным компьютерным проектированием на ПБГ, а стоимость сети увеличилась лишь на доли процента.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кудаев В.Ч.* Ранги экстремумов и структурная оптимизация больших сетевых систем // Известия КБНЦ РАН. 2016. № 4(72). С. 15-24.

2. *Кудаев В.Ч., Абазоков М.Б.* Ранговая оптимизация потоковых сетей // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. № 4(24). С. 178-185.

3. *Булатов В.П., Кассинская Л.И.* Некоторые методы минимизации вогнутой функции на выпуклом многограннике // Методы оптимизации и их приложения. Иркутск: СЭИ СО АН СССР. 1987. С. 151-172.

4. *Туй Х.* Вогнутое программирование при линейных ограничениях // Доклады АН СССР. 1964. Т. 159. № 1. С. 32-35.

5. *Трубин В.А., Михалевич В.С., Шор Н.З.* Оптимизационные задачи производственно-транспортного планирования. М.: Издательство «Наука», 1986. 260 с.

6. *Меренков А.П., Сеннова Е.В., Сумароков С.В. и др.* Математическое моделирование и оптимизация систем тепло-, водо-, нефте- и газоснобжения. Новосибирск: Наука, 1992. 407 с.

REFERENCES

1. Kudaev V.Ch. *Rangi ekstremumov i strukturnaya optimizatsiya bol'shikh setevykh sistem* [Ranks of extrema and structural optimization of large network systems] // News of the KBSC RAS. 2016. No. 4 (72). Pp. 15-24.

2. Kudaev V.Ch., Abazokov M.B. *Rangovaya optimizatsiya potokovykh setey* [Rank optimization of streaming networks] // Bulletin of KRAUNC. Phys.-mat. science. 2018. No 4 (24). Pp. 178-185.

3. Bulatov V.P., Kassinskaya L.I. *Nekotoryye metody minimizatsii vognutoy funktsii na vypuklom mnogogrannike* [Some methods for minimizing a concave function on a convex polyhedron] // *Metody optimizatsii i ikh prilozheniya* [Optimization Methods and Their Applications]. Irkutsk: SEI SB AS USSR. 1987. Pp.151-172.

4. Tui H. *Vognutoye programmirovaniye pri lineynykh ogranicheniyakh* [Concave programming under linear constraints] // Doklady AN SSSR. 1964. T. 159. No. 1. Pp. 32-35.

5. Trubin V.A., Mikhalevich V.S., Shor N.Z. *Optimizatsionnyye zadachi proizvodstvenno-transportnogo planirovaniya* [Optimization problems of production and transport planning] // Publishing House. M.: Science, 1986. 260 p.

6. Merenkov A.P., Sennova E.V., Sumarokov S.V. and other. *Matematicheskoye modelirovaniye i optimizatsiya sistem teplo-, vodo-, nefte- i gazosnobzheniya* [Mathematical modeling and optimization of heat, water, oil and gas supply systems]. Novosibirsk: Nauka, 1992. 407 p.

COMPUTER DESIGN OF STREAM NETWORKS OF P-th OPTIMALITY RANK

V.Ch. KUDAEV, M.B. ABAZOKOV

Institute of Computer Science and Problems of Regional Management –
branch of Federal public budgetary scientific establishment "Federal scientific center
"Kabardin-Balkar Scientific Center of the Russian Academy of Sciences"
360000, KBR, Nalchik, 37-a, I. Armand St.
E-mail: iipru@rambler.ru

A method for reducing the dimension of the synthesis problem of a stream network of the P-th rank of optimality is proposed. The method is based on the construction and use in the process of optimization of a chain of basic graphs (BG), on which a stream network of minimum cost is synthesized, having various degrees of vertices, so that synthesis of a network of rank R on a dense base graph (DBG) is replaced by the solution of the synthesis problem on a loose BG (LBG) with subsequent correction of the resulting network on the DBG. An extensive computational experiment was carried out, which showed the effectiveness of the proposed method - the value of the objective function (network cost) in the task of synthesizing a network of rank P according to the chain of basic graphs and directly on the DBG differ by only a fraction of a percent, and the time to solve the problem on the computer decreases about 5 times with the construction of a network of 4th rank.

Keywords: stream network, synthesis problem, economic parameters, network optimality rank, task dimensionality reduction, chain of basic graphs, computational experiment.

Работа поступила 03.12.2019 г.