INSTITUTE OF APPLIED MATHEMATICS AND AUTOMATION
KABARDINO-BALKARIAN STATE UNIVERSITY

ACTUAL PROBLEMS OF APPLIED MATHEMATICS AND PHYSICS

INTERNATIONAL
RUSSIAN-CHINESE
CONFERENCE

ELBRUS - 2015

PROCEEDINGS

NONLOCAL BOUNDARY PROBLEMS AND MODERN PROBLEMS IN ALGEBRA, ANALYSIS AND INFORMATICS

ELBRUS

SCIENTIFIC
SCHOOL
FOR
THE YOUTH

Dec. 14 - Dec. 18
2015

ELBRUS, KABARDINO-BALKARIAN REPUBLIC
DECEMBER 14-18, 2015

In the paper the following boundary value problem is studied which we refer to Tricomi problem analogue for equation (1) in Ω domain which contains intervals A_0B_0, $A_1B_1 : 0 < x < r$ of equation modification on lines $y = 0$ и $y = 1$.

Problem 1. *Find* $u(z) = u(x, y)$ *of class* $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, *which satisfies equation (1) in* $\Omega_{01}, \Omega_0, \Omega_1$ *domain and homogenous boundary value conditions*

$$u(z) = 0 \; \forall z \in \sigma_0 \cup \sigma_1, \tag{2}$$

$$u(z) = 0 \; \forall z \in A_0C_0 \cup A_1C_1. \tag{3}$$

Let's denote: L^{*} – operator adjacent to operator L according to Lagrange;

$$L^{*}\alpha = k(y)\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2} - \frac{\partial a\alpha}{\partial x} - \frac{\partial b\alpha}{\partial y} + c\alpha;$$

$\alpha = \alpha(x, y)$; $W_2^l(\Omega)$ – is Sobolev space with $(\cdot,\cdot)_l$ inner product and and $||\cdot||_l$, $l = 0, 1....$ norm; $W_2^0(\Omega) = L^2(\Omega)$; $W(B)$ – is a set of u function of class $W = C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega \backslash \{y = 0, y = 1\}) \cap W_2^1(\Omega) \cap W_2^1(\partial\Omega)$ for which $Lu \in L^2(\Omega)$ and conditions (2)-(3) are followed.

The major result of the paper is:

Theorem 1. *Let a coefficient of equation (1) and* σ_0 *u* σ_1 *curves are such that there exist at least one* (α, β, γ) *vector with terms:*

$$\alpha \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\overline{\Omega}_{01}) \cap C^2(\overline{\Omega}_0) \cap C^2(\overline{\Omega}_1),$$

$$\beta, \gamma \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\overline{\Omega}_{01}) \cap C^1(\overline{\Omega}_0) \cap C^1(\overline{\Omega}_1),$$

which satisfy the following differential inequality system

$$L^{*}\alpha + \alpha c \geqslant \frac{\partial \beta c}{\partial x} + \frac{\partial \gamma c}{\partial y} \; \forall z \in \Omega,$$

$$k(y)\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x} - 2\alpha\right) + \gamma k'(y + 2\beta\alpha) > 0 \; \forall z \in \overline{\Omega},$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\gamma}{\partial y} + 2\gamma\beta > 2\alpha \; \forall z \in \overline{\Omega},$$

$$\left[k(y)\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x} - 2\alpha\right) + \gamma k'(y) + 2\beta a\right] \times$$

$$\times \left(\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\gamma}{\partial y} - 2\alpha + 2\gamma\beta\right) > \left[\frac{\partial\beta}{\partial y} + k(y)\frac{\partial\gamma}{\partial x} - b\beta\alpha\gamma\right]^2 \; \forall z \in \overline{\Omega},$$

adjacent conditions

$$\lim_{y\to+0}\left[\frac{\partial\alpha(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial\alpha(x,-y)}{\partial y}\right] \geqslant 0, \; \lim_{y\to+0}[k(y) - k(-y)]\gamma(x, 0) \geqslant 0,$$

$$\lim_{y\to 1+0}\alpha_y(x, y) \geqslant \lim_{y\to 1-0}\alpha_y(x, y), \; \lim_{y\to 1+0} k(y) \geqslant \lim_{y\to 1-0} k(y)$$

and boundary value conditions

$$(\beta, \gamma)n = \beta x_n + \gamma y_n \leqslant 0 \; \forall z \in \sigma_0 \cup \sigma_1,$$

$$\beta + \sqrt{-k}\gamma \leqslant 0 \; \forall z \in A_0C_0 \cap A_1C_1,$$

$$4k(y)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y} + \sqrt{-k}\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right) \leqslant (2\sqrt{-k} + 2kb - k')\alpha +$$

$$+2[\beta\sqrt{-k(y)} + \gamma k(y)]c \; \forall z \in A_0C_0 \cap A_1C_1,$$

where $n = (x_n, y_n)$ *is a unit outer normal toward* $\partial\Omega$ *boundary of* Ω *domain. Then we have a priori estimate*

$$||u||_1 \leqslant c_0||Lu||_0 \; \forall u \in W(B),$$

where c_0 *– is a positive constant independent on* u.

Theorem 1 is an analogue of A.M. Nakhushev theorem [1, c.160] for equation (1) in case when $\operatorname{sign} k(y) = \operatorname{sign} y$.

It follows from theorem 1 the uniqueness of regular solution for problem 1 and existence of the weak solution for the adjacent problem.

In my paper [2] it is proved existence of classic solution of problem 1 for equation

$$\operatorname{sign}(y^2 - y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

in Ω domain.

References

1. *Nahushev A.M.* Problems with shift for partial differential equations, Moscow, Nauka, 2006, 287 p.

2. *Kudaeva Z.V.* Tricomi problem analogue for mixed type equation with two parallel degeneration lines, Proceedings of the 1st All-Russian conference of young scientists "Mathematical modeling of fractal processes, related problems of analysis and informatics". Nalchik-Cheget, 2010.

MATHEMATICAL MODEL OF INFORMATION DISSEMINATION

© Kugotova M.

Institute of Applied Mathematics and Automation, Nalchik, Russia

e-mail: kugotova.radima@mail.ru

In this work, we study a mathematical model of information dissemination in the group of interacting individuals.

Let $u = u(t)$ be the number of informants in the group at the time t, and N be the number of individuals in the group, and $u(0) = u_0$ be the number of informant at the initial time. The intensity of the dissemination of information by way of media is designated as a, while the intensity of the dissemination of information through rumors is designated as b. Taking into account the non-locality of the proces under study in time, the dissemination process can be described by the following problem:

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = (a + bu)(N - u), \quad u(0) = u_0, \quad 0 < \alpha < 1, \quad t \in (0, T) \qquad (1)$$

where ∂_{0t}^{α} is the operator of fractional differentiation in the sense Caputo [1, p.11], parameter α defines the communication structure. This model in case when $\alpha = 1$ was considered in [2, p. 19].

In this work the problem (1) is reduced of a nonlinear integral equation, for which the algorithm of numerical solution is constructed and realized.

References

1. *Nakhushev A.M.* Fractional Calculus and Its Applications, Moscow, 2003. (in Russian).

2. *Mikhailov A.P., Petrov A.P., Marevtseva N.A., Tretiakova I.V.* Development of a model of information dissemination in society, Mathematical Models and Computer Simulations, 2014, 6:5, pp. 535-541.

MATHEMATICAL MODELING OF THE BUBBLE CHARGES DYNAMIC IN THE FRACTAL CLOUD DROPLETS

© Kumykov T.

Institute of Applied Mathematics and Automation, Nalchik, Russia

e-mail: macist20@mail.com

Currently, the development of mathematical models of convective clouds with a detailed view of the environment impact on various fractal geological processes in clouds are of great interest and contribute to the overall picture of the physics of clouds. It is well known clouds with strong convective flows have a fractal structure and the processes in it are described using the mathematical apparatus of fractional calculus.

The paper presents a mathematical model of the charge dynamics in bubbles formed in cloud droplets in view of fractal media. It is shown that the process of charge dynamics of bubbles in a fractal medium is described by the equation with the Caputo fractional derivative.

The equation solutions of the growth kinetics and dynamics of charge in bubbles formed in a drop considering fractal clouds was obtained

$$a(t) = a_0 E_{\alpha,1}(Kt^{\alpha}), \quad 0 < \alpha < 1,$$
$$q_r(t) = nq_0 E_{\alpha,1}(Kt^{\alpha}), \quad 0 < \alpha < 1,$$

where a_0 – bubble size at the initial moment of time, $E_{\alpha,1}(Kt^{\alpha}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{K^i(t)^{\alpha i}}{\Gamma(1+\alpha i)}$ – Mittag-Lefler like function, $K = 2,4\varphi\frac{p^2}{\lambda p_0 \sigma}$, $\lambda > 0 = const$, φ – supersaturation, p – ambient pressure, p_0 – atmospheric pressure, σ – water surface tension, q_0 – bubble charge at the initial moment of time.

References

1. *Pietronero L., Tosatti E.* Fractals in Physics, Proceedings of the Sixth Trieste International Symposium on Fractals in Physics, ICTP, Trieste, Italy, 1985, pp. 644-649.

2. *Nakhushev A.M.* Fractional calculus and its application, Moscow, Fizmatlit, 2003, 272 p.

ABOUT ONE ADDITIVE PROBLEM WITH QUADRATIC FORMS THE DETERMINANT IS A PRIME

© Kurtova L.

Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

e-mail: kurtovaln@ya.ru

In 1927 by Ingham were stated and solved by elementary method problems of received asymptotic formula for number of solution the equation:

$$x_1x_2 - x_3x_4 = 1, \quad x_1x_2 \leqslant n. \qquad (1)$$

This problem named by additive divisor problem.

In 1931 T. Esterman [1] derived asymptotic formula for number $J(n)$ of solution (1) by circular method:

$$J(n) = nP_2(\ln n) + R(n),$$

where $P_2(t)$ – polynomial degree 2, and $R(n) = O(n^{11/12} \ln^{17/3} n)$.

Estimation of remainder term this formula is defined more exactly by many researchers.

So in 1979 D.I. Ismoilov [2], developing Esterman method, proved that $R(n) = O(n^{5/6+\varepsilon})$, where $\varepsilon > 0$ – the arbitrarily small constant. By other method D. R. Heath-Brown [3] received the same estimation of remainder term.

In 2006 G.I. Arkhipov, V.N. Chubarikov [4] proved by elementary methods that $R(n) = O(n^{3/4} \ln^4 n)$.

In 1982 J.-M. Deshouillers, H. Iwaniec [5], using estimate for sum of Kloostermann's sums, proved that $R(n) = O(n^{2/3+\varepsilon})$.

There are many analogs of this problem in math literature. There is one of them.

Let d – negative square-free number, $F = Q(\sqrt{d})$ – imaginary quadratic field, $\delta_F = -p$ – discriminant of field F, p – prime, $Q_1(\overline{m})$, $Q_2(\overline{k})$, – binary

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение "Институт прикладной математики и автоматизации"

Институт математики и математического моделирования Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан

Международный институт математики, нано- и информационных технологий Адыгской (Черкесской) Международной академии наук

МАТЕРИАЛЫ

НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И ПРОБЛЕМЫ СОВРЕМЕННОГО АНАЛИЗА И ИНФОРМАТИКИ

XII ШКОЛА МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ

ТЕРСКОЛ 2014

PROCEEDINGS

XII OF YOUNG SCIENTISTS SCHOOL

Non-local boundary value problems and problems of modern analysis and informatics

KBR, Terskol

3-7 December 2014

с совокупностью из $|\Lambda|$ условий $\mathbf{s}^2(\mathbf{x}) = 1$, $\mathbf{x} \in \Lambda$. Наличие такой совокупности условий не позволяет применить стандартный метод неопределенных множителей для исследования функционала $\mathsf{H}[\mathbf{s}]$ на экстремум, что обуславливает некоторую неочевидность решения. В рассматриваемом в работе случае задачу удается решить следующим образом. Сначала, используя трансляционную инвариантность формы $\mathsf{H}_\Lambda[\mathbf{s}]$, «диагонализуем» ее переходом к комплексным переменным

$$\bar{\mathbf{s}}(\mathbf{k}) = \frac{1}{|\Lambda|}\sum_{\mathbf{x}\in\Lambda} \mathbf{s}(\mathbf{x})e^{-i(\mathbf{x},\mathbf{k})}, \ \ \mathbf{k} \in \bar{\Lambda}$$

так, что

$$\mathsf{H}_\Lambda[\mathbf{s}] = \frac{1}{2N}\sum_{\mathbf{k}\in\bar{\Lambda}} \bar{I}(\mathbf{k})\eta(\mathbf{k})\,, \tag{2}$$

где $\eta(\mathbf{k}) = |\bar{s}_j(\mathbf{k})|^2$ – неотрицательные переменные, подчиненные условию

$$\sum_{\mathbf{k}\in\bar{\Lambda}} \eta(\mathbf{k}) = N^2. \tag{3}$$

При этом переменные $\eta(\mathbf{k})$ не являются независимыми, а, во-первых, связаны условиями $\eta(\mathbf{k}) = \eta(-\mathbf{k})$, $\mathbf{k} \in \bar{\Lambda}$ и, во-вторых, – условиями

$$\sum_{\mathbf{k}'\in\bar{\Lambda}} \bar{s}_j(\mathbf{k}')\bar{s}_j^*(\mathbf{k}'-\mathbf{k}) = 0\,, \quad \mathbf{k} \in \bar{\Lambda}\setminus \mathbf{0}\,. \tag{4}$$

Затем, находится минимум линейной формы по $\eta(\mathbf{k})$ на выпуклом множестве $[0,1]^{|\Lambda|}$ при условии выполнимости (3). Это приводит, с учетом равенства $\bar{I}(-\mathbf{k}) = \bar{I}(\mathbf{k})$, к тому, что все поля искомого класса $\mathcal{M}$ описываются формулой

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{K}} \bar{\mathbf{s}}(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})} \tag{5}$$

так, что из (3) и (4) следует

$$\sum_{\mathbf{k}'\in\mathcal{K}} \eta(\mathbf{k}') = N^2\,, \tag{6}$$

$$\sum_{\mathbf{k}'\in\mathcal{K}\,:\,\mathbf{k}-\mathbf{k}'\in\mathcal{K}} \bar{s}_j(\mathbf{k}')\bar{s}_j^*(\mathbf{k}'-\mathbf{k}) \neq 0\,, \quad \mathbf{k} \in \mathcal{K}\,. \tag{7}$$

Наконец, непосредственной подстановкой формулы (5) в (6) и (7), алгебраически, проверяется, что, для их выполнимости, в сумме (5) должно остаться ровно два слагаемых с векторами $\{\mathbf{k}_*, \mathbf{k}_*\} \subset \mathcal{K}$ и при этом коэффициенты в этих слагаемых должны быть комплексно сопряженными друг другу и взаимно ортогональными векторами. Из условия $\mathbf{s}^2(\mathbf{x}) = 1$ следует, что реальная и мнимая части этих коэффициентов имеют единичную норму.

Литература

1. *Рюэль Д.* Статистическая механика. Строгие результаты. М.: Мир, 1971.

УДК 517.958

О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ

© Куготова М.Н.

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
"Институт прикладной математики и автоматизации"
(Россия, Нальчик)
e-mail: kugotova.radima@mail.ru

В работе исследуется математическая модель распространения информации в группе взаимодействующих индивидов. Пусть $u = u(t)$ - количество адептов в момент времени t, n - численность индивидов в группе. С учетом нелокальности по времени процесс распространения информации может быть описан следующей задачей

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = (a + bu)(n - u), \qquad u(0) = u_0, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{1}$$

где ∂_{0t}^{α} - оператор дробного дифференцирования в смысле Капуто [1,с.11], параметр α характеризует коммуникационную структуру, a - интенсивность распространения информации через средства массовой информации; b - интенсивность распространения информации через информированного ранее индивида (слухи). Данная модель в случае, когда $\alpha = 1$ рассмотрена в работе [2].

Литература

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит. 2003. 272 с.

2. *Михайлов А.П., Петров А.П., Маревцева Н.А., Третьякова И.В.* Развитие модели распространения информации в социуме // Математическое моделирование, 2014. Т. 26, № 3. С. 65-73.

УДК 517.958:530.145.6

УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ АТОМА В ЦЕПОЧКЕ

© Кунижев Х.Л.

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
"Институт прикладной математики и автоматизации"
(Россия, Нальчик)
e-mail: kh.kunizhev@gmail.com

В работе [1] был найден спектр энергии для атомов-осцилляторов твердого тела с фрактальной структурой с учетом ангармонизма колебаний. В настоящей работе рассматривается аналогичная задача с использованием потенциала Морзе [2].

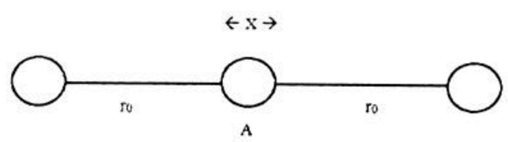

Рис. 1: Атом в цепочке

Рассматривается атом в цепочке (см. рис. 1). Парный потенциал Морзе имеет вид:

$$V(x) = D[\exp(-2\alpha(r - r_0)) - 2\exp(-\alpha(r - r_0))], \tag{1}$$

тогда энергия колебания атома A представима в виде:

$$U(x) = V(r_0 + x) + V(r_0 - x) = 2D(\mathrm{ch}(2\alpha x) - 2\,\mathrm{ch}(\alpha x)). \tag{2}$$

Если принять во внимание смещение потенциальной кривой, то (2) принимает вид

$$U(x) = 2D(1 + \mathrm{ch}(2\alpha x) - 2\,\mathrm{ch}(\alpha x)). \tag{3}$$

С учетом (3) гамильтониан задачи запишется в виде:

$$\widehat{H} = \frac{\widehat{P}^2}{2m} + 2D(1 + \mathrm{ch}(2\alpha x) - 2\,\mathrm{ch}(\alpha x)). \tag{4}$$

Таким образом, получаем уравнение Шредингера:

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E - 2D(1 + \mathrm{ch}(2\alpha x) - 2\,\mathrm{ch}(\alpha x))]\Psi = 0. \tag{5}$$

Вводя новую переменную $y = \mathrm{ch}(\alpha x)$ получаем:

$$\frac{d^2\Psi}{dy^2} - \frac{1}{y^2}\frac{d^2\Psi}{dy^2} + \frac{1}{y}\frac{d\Psi}{dy} + (\frac{p}{y^2} - 2q + \frac{2q}{y})\Psi = 0, \tag{6}$$

$$p = \frac{2mE}{\hbar^2\alpha^2}, \quad q = \frac{4mD}{\hbar^2\alpha^2}.$$

В данной работе исследуется уравнение (6): определяются волновая функция и спектр энергии.

Литература

1. *Рехвиашвили С.Ш.* Теплоемкость твердых тел фрактальной структуры с учетом ангармонизма колебаний атомов // ЖТФ. 2008. Т. 78. № 78. С. 54–58.
2. *Флюгге З.* Задачи по квантовой механике. М.: Мир, 1974. С. 191—195.

УДК 519.21 + 537.86

СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

© Лам Тан Фат, Вирченко Ю.П.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Белгородский государственный национальный исследовательский университет"
(Россия, Белгород)
e-mail: lam_tan_phat1802@yahoo.com

На основе стохастической модели изучаются тепловые флуктуации электромагнитного поля в ограниченной области $\Omega = [0, L]^3$, $L > 0$ в классическом (не квантовом) представлении. Из условия соленоидальности поля с вероятностью единица находится общий вид корреляционной функции $K_{ij}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}, s)$.