Кабардино-Балкарский государственный университет имени Х.М. Бербекова
Kabardino-Balkarian State University

# БЛАГОДАРНОСТЬ

## ОБЪЯВИТЬ

**ГАСИЕВОЙ**
**Асият Мухадиновне**

*студентке 4 курса направления «Прикладная математика и информатика»*

*за активную научную деятельность*
*исполнителю гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых ученых*
*МК-3360.2015.1*

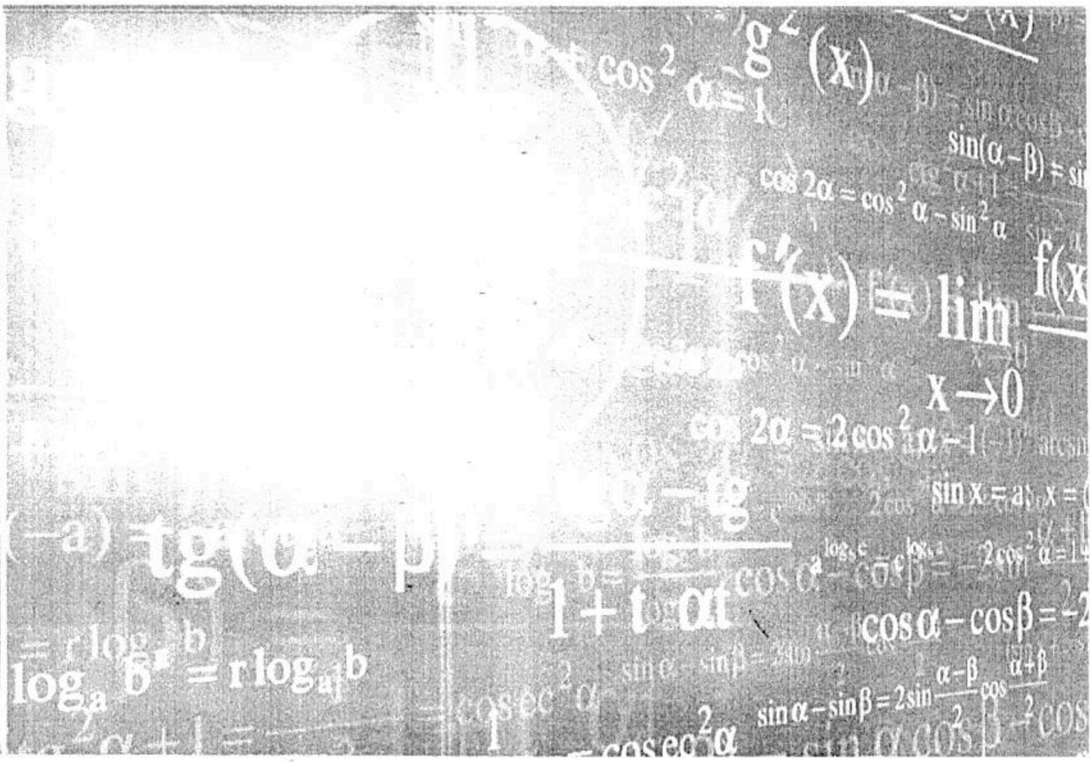
**И.О. РЕКТОРА** **Б.С. КАРАМУРЗОВ**

*2015г.*

СЕВЕРО-ОСЕТИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. К.Л. ХЕТАГУРОВА
СОГУ
1920

# АЛГЕБРА, АНАЛИЗ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ



# РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ И КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ТРЕТЬЕГО РОДА[1]

**А. М. Гасиева** (Россия, Нальчик; КБГУ),
**А. А. Алиханов** (Россия, Нальчик; НИИ ПМА КБНЦ РАН)

Разностная схема повышенного порядка аппроксимации для первой краевой задачи уравнения диффузии дробного порядка построена в работе [1]. Априорные оценки решений краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка в дифференциальной и разностной трактовках получены в работах [2-3].

В прямоугольнике $\overline{Q}_T = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ рассмотрим третью краевую задачу

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x,t)u + f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{1}$$

$$\begin{cases} k(0,t)u_x(0,t) = \beta_1(t)u(0,t) - \mu_1(t), \\ -k(l,t)u_x(l,t) = \beta_2(t)u(l,t) - \mu_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{3}$$

где $\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{u_s(x,s)}{(t-s)^{\alpha}}ds$ — дробная производная Капуто порядка $\alpha$, $0 < \alpha < 1$, $k(x,t)$, $q(x,t)$ и $f(x,t)$ — заданные достаточно гладкие функции, $\beta_i(t) \geqslant \beta_0 > 0$, $i = 1, 2$.

**В** прямоугольнике $\overline{Q}_T$ введем сетку $\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$ где $\overline{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \ldots, N, h = l/N\}$, $\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \ldots, j_0, \tau = T/j_0\}$.

Дифференциальной задаче (1)-(3) поставим в соответствие разностную схему

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y = \Lambda y^{(\sigma)} + \Phi_i^{j+1}, \quad i = 0, \ldots, N, \quad j = 0, 1, \ldots, j_0 - 1, \tag{4}$$

$$y_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, N, \tag{5}$$

где $\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_i = \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)} y_{t,i}^s$ — разностный аналог дробной производной Капуто повышенного порядка аппроксимации [1],

$$\Lambda y = \begin{cases} \frac{2}{h}(\alpha_1 y_{\bar{x},1} - \overline{\beta}_1(t_{j+\sigma})y_0), & i = 0, \\ (\alpha y_{\bar{x}})_x - dy, & i = 1, \ldots, N-1, \\ -\frac{2}{h}(\alpha_N y_{\bar{x},N} - \overline{\beta}_2(t_{j+\sigma})y_N^{(\sigma)}), & i = N, \end{cases}$$

[1]Работа выполнена по гранту Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых МК-3360.2015.1.



$$\Phi_i^{j+1} = \begin{cases} \frac{2}{h}\overline{\mu}_1(t_{j+\sigma}), & i = 0, \\ \varphi_i^{j+1}, & i = 1, \ldots, N-1, \\ \frac{2}{h}\overline{\mu}_2(t_{j+\sigma}), & i = N, \end{cases}$$

$$\alpha_i^{j+1} = k(x_{i-1/2}, \quad t_{j+\sigma}), \quad \varphi_i^{j+1} = f(x_i, t_{j+\sigma}), \quad d_i^{j+1} = q(x_i, t_{j+\sigma}),$$

$$\overline{\mu}_1(t_{j+\sigma}) = \mu_1(t_{j+\sigma}) + \frac{h}{2}f(0, t_{j+\sigma}), \quad \overline{\mu}_2(t_{j+\sigma}) = \mu_2(t_{j+\sigma}) + \frac{h}{2}f(1, t_{j+\sigma}).$$

**Теорема.** *Разностная схема (4)-(5) безусловно устойчива и для ее решения справедлива априорная оценка*

$$\|y^{j+1}]|_0^2 \leqslant M\left(\|y^0]|_0^2 + \max_{0 \leqslant j \leqslant j_0 - 1}(\|\varphi^{j+1}]|_0^2) + \mu_1^2(t_{j+\sigma}) + \mu_2^2(t_{j+\sigma})\right), \tag{6}$$

*где $M > 0$ — известная постоянная не зависящая от $h$ и $\tau$.*

Из априорной оценки (6) следует устойчивость и сходимость разностной схемы (4)-(5).

## Литература

1. Alikhanov A. A. A new difference scheme for the time fractional diffusion equation // J. of Computational Physics.–2015.–Vol. 280.–P. 424-438.
2. Алиханов А. А. Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка // Дифференц. уравнения. –2010.–Т. 46 (5).–С. 658-664.
3. Alikhanov A. A. Boundary value problems for the diffusion equation of the variable order in differential and difference settings // Appl. Math. & Comp.–2012.–Vol. 219.–P. 3938-3946.