МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 517.956.35
DOI: 10.35330/1991-6639-2021-2-100-5-10
MSC: 35K20; 35L20

О ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НАГРУЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО И ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПОВ

О.Л. БОЗИЕВ

Институт информатики и проблем регионального управления –
филиал ФГБНУ «Федеральный научный центр
«Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук»
360000, КБР, г. Нальчик, ул. И. Арманд, 37-а
E-mail: iipru@rambler.ru

Рассматриваются примеры реализации приближенного метода решения нагруженных дифференциальных уравнений в частных производных. Исследуемые уравнения содержат целую степень модуля решения или его производной под знаком интеграла по пространственной переменной. В процессе решения начально-краевой задачи устанавливается априорная оценка решения, используемая в дальнейшем для линеаризации уравнения. Производится переход от него к ассоциированному обыкновенному дифференциальному уравнению. Решение последнего используется для построения решения исходной задачи. Демонстрируется способ подбора неопределенной постоянной, возникающей при установлении априорной оценки.

Ключевые слова: степенная нелинейность, нагруженное уравнение, априорная оценка, приближенное решение.

Поступила в редакцию 09.02.2021

Для цитирования. Бозиев О.Л. О приближенном методе решения нагруженных уравнений гиперболического и параболического типов // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2021. № 2(100). С. 5-10.

Введение

Нагруженные дифференциальные уравнения, содержащие интеграл по пространственной переменной целой степени искомой функции или ее производной, моделируют некоторые нелинейные процессы.

К ним относится, в частности, уравнение вида

$$u_t - a\left(\int_0^l u_x^2 dx\right)\Delta u = 0, \tag{1}$$

возникающее при изучении проникновения электромагнитного поля в вещество, коэффициент электропроводности которого зависит от температуры [1]. Нагруженные уравнения также могут применяться в качестве аппроксимирующих для ассоциированных с ними нелинейных уравнений. Например, в [2] уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} - au - \left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi u^2 dx\right)^\alpha u = 0, \tag{2}$$

рассматривается как первое приближение уравнения Клейна-Гордона

$$u_{tt} - u_{xx} - au - u^{1+2\alpha} = 0.$$

Нелинейный множитель в уравнениях (1) и (2) и подобных им будем называть интегральной нагрузкой. Различные способы приближенного решения таких уравнений основываются на линеаризации нелинейного члена, причем единого подхода не существует. Можно заметить, что во многих случаях интегральная нагрузка уравнения либо непосредственно, либо путем некоторых несложных преобразований может быть записана как норма искомой функции или ее производной в некотором лебеговом пространстве. В частности, уравнения (1) и (2) можно переписать соответственно в виде

$$u_t - a\left(\|u_x\|^2_{2,\Omega}\right)\Delta u = 0,$$

$$u_{tt} - u_{xx} - au - \pi^{-\alpha}\|u\|^{2\alpha}_{2,\Omega} u = 0,$$

где $\|\cdot\|_{p,\Omega}$ – норма в пространстве $L_p(\Omega)$, Ω – интервал интегрирования.

В данной работе описывается метод решения уравнений с интегральной нагрузкой, в котором производится линеаризация нагруженного уравнения с помощью априорной оценки решения соответствующей задачи. Он был использован, например, в [3] для гиперболического уравнения

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + bu_t \int_\Omega |u|^p dx = 0$$

с натуральной степенью $p \geq 3$, а также в [4] для параболического уравнения

$$u_t - u_{xx} - \frac{a}{l}\int_\Omega u^p dx = f(x,t),$$

в котором $p \in (0, 1)$.

Пусть рассматривается некоторая начально-краевая задача для уравнения одного из следующих видов

$$Lu + \|u\|^p_{p,\Omega} u^m = 0, \qquad Lu + \|u\|^p_{p,\Omega} u_t = 0, \tag{3}$$

где Lu – линейный дифференциальный оператор второго порядка параболического или гиперболического типа, натуральное $p > 1$, $m = 1$ либо 0.

Для линеаризации (3) необходимо установить априорную оценку решения задачи вида

$$\|u\|^p_{p,\Omega} \leq K(t),$$

выполняющуюся для всех заданных t. Функция $K(t)$ в дальнейшем подлежит определению. Затем необходимо принять равенство в последней оценке для перехода от (3) к соответствующему линейному уравнению

$$Lu + K(t)u^m = 0 \quad \text{либо} \quad Lu + K(t)u_t = 0. \tag{4}$$

Точное или приближенное решение любого из уравнений (4) при исходных начально-краевых условиях будет называться приближенным решением соответствующего уравнения (3). Процедура установления априорной оценки и вслед за этим вида функции $K(t)$ представляет основную сложность в описанном процессе. Впоследствии, путем интегрирования (4), производится переход к вспомогательному обыкновенному дифференциальному уравнению, с помощью решения которого определяется решение (4).

Проиллюстрируем применение метода на следующих примерах.

Пример 1.

В области $Q = (0,T)\times\Omega$, $\Omega = [0,1]$ рассмотрим разновидность уравнения, возникающего в релятивистской квантовой механике [5]:

$$u_{tt} - u_{xx} + u_t \int_\Omega |u|^p dx = 0. \tag{5}$$

При $p = 3$ запишем его в виде

$$u_{tt} - u_{xx} + \|u\|_{3,\Omega}^{3} u_t = 0. \tag{6}$$

Требуется найти интегрируемую функцию $u(x,t) \in C^{2,2}(\bar{Q})$, удовлетворяющую уравнению (5) (следовательно, и (6)) в области Q, а также условиям

$$u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0, 0 \le x \le 1, \tag{7}$$

$$u(0,t) = t, u(1,t) = t, 0 \le t \le T. \tag{8}$$

Значение T в (8) будет выбрано ниже.

Для линеаризации (6) воспользуемся априорной оценкой задачи (6)-(8), полученной в [4], для общего случая натуральных $p \ge 3$ в (5) и произвольных достаточно гладких правых частях в (8):

$$\|u\|_{p,\Omega}^{p} \le K(t) = \frac{2F(T)}{2 - F(T)t}, \tag{9}$$

$$F(T) = C(3 + 2T^2)T^2. \tag{10}$$

Постоянная C в формуле (10) возникает при использовании установленных ранее некоторых других априорных оценок для $u(x, t)$.

Примем $\|u\|_{3,\Omega}^{3} = K(t)$ и будем рассматривать вместо (6) уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} + K(t)u_t = 0.$$

Следуя [4], проинтегрируем последнее уравнение по x, применим теорему о среднем значении интеграла и воспользуемся граничными условиями, что приводит после повторного интегрирования к соотношению

$$u(x,t) = \frac{x}{2}(x-1)\left(\bar{u}'' + K(t)\bar{u}'\right) + t, \tag{11}$$

$$\bar{u}(t) = \int_{\Omega} u dx. \tag{12}$$

Таким образом, получено равенство (11), выражающее решение задачи (6)–(8) через функции $\bar{u}(t)$ и $K(t)$. Для их нахождения применим преобразование (12) к выражению (11) и условиям (7), что приводит к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\bar{u}'' + K(t)\bar{u}' + 12\bar{u} = 12t, \tag{13}$$

$$\bar{u}(0) = 0, \bar{u}'(0) = 0. \tag{14}$$

Так как для единственности ее решения требуется непрерывность функции $K(t)$ при $t \in (0,T)$, то из (9) вытекает необходимость выполнения условия $t < 2/F(T)$, что в свою очередь приводит к неравенству $T < 2/F(T)$. Из последнего в силу (10) и неотрицательности априорной оценки следует, что

$$0 \le C < \frac{2}{(3 + 2T^2)T^2}.$$

Полученная оценка позволяет выбирать константу C в выражении (10) в зависимости от значения T. Положим $T = 1$, тогда $C < 0{,}4$. Пусть $C = 0{,}3$, тогда из (10) следует $F(T) = 1{,}5$, а из (9) находим $K(t) = 6/(4 - 3t)$. Это означает, что уравнение (13) принимает вид

$$\bar{u}'' + \frac{6}{4-3t}\bar{u}' + 12\bar{u} = 12t.$$

Его решением при условиях (14) является функция

$$\bar{u}(t) \approx t - 0,088\left(2(3t-4)\cos\left(2\sqrt{3}t\right) - \sqrt{3}\sin\left(2\sqrt{3}t\right)\right) - 0,291\left(2(3t-4)\sin\left(2\sqrt{3}t\right) + \sqrt{3}\cos\left(2\sqrt{3}t\right)\right).$$

Замечая, что в силу (13) $\bar{u}'' + K(t)\bar{u}' = 12t - 12\bar{u}$, представим (11) в виде

$$u(x,t) = 6x(x-1)(t-\bar{u}) + t,$$

что позволяет записать приближенное решение задачи (5), (7), (8):

$$\begin{gathered} u(x,t) \approx 6x(x-1)\Big(0,088\left(2(3t-4)\cos\left(2\sqrt{3}t\right) - \sqrt{3}\sin\left(2\sqrt{3}t\right)\right) + \\ +0,291\left(2(3t-4)\sin\left(2\sqrt{3}t\right) + \sqrt{3}\cos\left(2\sqrt{3}t\right)\right)\Big) + t. \end{gathered} \tag{15}$$

Пример 2.

В области $Q = (0,T)\times\Omega,\ \Omega = [0,l],$ рассмотрим задачу

$$u_t - u_{xx} - au + \frac{a}{l}\int_{\Omega} u^2 dx = 0, \tag{16}$$

$$u(x,0) = x,\ \ 0 \le x \le l, \tag{17}$$

$$u(0,t) = t, u(l,t) = t, 0 \le t \le T. \tag{18}$$

Уравнение (16) является приближением уравнения Фишера [6] и естественным образом представляется в виде

$$u_t - u_{xx} - au + \frac{a}{l}\|u\|_{2,\Omega}^2 = 0. \tag{19}$$

Для линеаризации (19) воспользуемся априорной оценкой задачи (16)–(18), полученной в [7]:

$$\|u\|_{2,\Omega}^2 \le K(t), \tag{20}$$

$$K(t) = Ce^{2at}\left(1 + \sqrt{\frac{C}{l}}\left(e^{at}-1\right)\right)^{-2},\ \ C < \frac{l}{a^2T^2}e^{-2aT}. \tag{21}$$

Положим равенство в (20) и перейдем от (19) к линейному уравнению

$$u_t - u_{xx} - au = -\frac{a}{l}K(t).$$

Пусть a = 0,5, l = 1, T = 1. Следуя [6], проинтегрируем последнее уравнение по x, применим теорему о среднем значении и воспользуемся граничными условиями, что приводит после повторного интегрирования к выражению (см. (12)):

$$u(x,t) = \frac{x(x-1)}{2}\left(\bar{u}'(t) - 0,5\bar{u}(t) - 0,5K(t)\right) + t. \tag{22}$$

Получено равенство, выражающее решение задачи (16)–(18) через функции $\bar{u}(t)$ и $K(t)$. При указанных a и t из (21) следует, что $0 \le C < 16,756$. Пусть C = 1, тогда $K(t) = e^{0,5t}$. Для нахождения $\bar{u}(t)$ применим преобразование (12) к выражению (22) и условию (17), что приводит к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\bar{u}' + 11,5\bar{u} = 24t - e^{0,5t},$$

$$\bar{u}(0) = 0,5.$$

Ее решением является функция

$$\bar{u}(t) \approx 0,7853e^{-11t} - 0,0869e^{0,5t} + 2,1818t - 0,1983.$$

Подстановка в (22) дает приближенное решение задачи (16)–(18):

$$u(x,t) \approx \frac{x(x-1)}{2}\left(-\frac{8,6383}{e^{12t}} - \frac{0,3926}{e^{11t}} - \frac{0,0435}{e^{0,5t}} - 0,2065e^{0,5t} + 1,0909t + 0,0992\right) + t. \qquad (23)$$

Заключение

Очевидно, что вид функции (15), так же, как и функции (23), зависит от заданного значения T, что в свою очередь влияет на выбор константы C, а за ней и функции $K(t)$ в выражениях (15) и (23) соответственно. Отсюда следует, что данный метод позволяет находить некоторое множество приближенных решений поставленной задачи, зависящих от выбора C. Установление некоторого критерия выбора значения C позволило бы находить «наиболее точные» приближенные решения поставленных задач.

Найденное приближенное решение уравнения вида (3) при соответствующих условиях может быть использовано в качестве начального приближения в итерационном процессе поиска «лучшего» решения исходной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаптев Г.И.* Квазилинейные параболические уравнения второго порядка с интегральными коэффициентами // ДАН СССР. 1987. Т. 293. № 2. С. 306–309.

2. *Grotta Ragazzo C.* Chaos and integrability in a nonlinear wave equation // Journal of Dynamics and Differential Equations. 1994. Vol. 6. No. 1. P. 227–244.

3. *Бозиев О.Л.* Решение нелинейного гиперболического уравнения приближенно-аналитическим методом // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 51. С. 5–14. DOI 10.17223/19988621/51/1.

4. *Бозиев О.Л.* Аппроксимация решений нелинейных параболических уравнений решениями ассоциированных нагруженных уравнений // Нелинейный мир. 2018. № 4. С. 3–10. DOI 10.18127/j20700970-201804-01.

5. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. С. 736.

6. *Мартинсон Л.К., Малов Ю.И.* Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2002. С. 368.

REFERENCES

1. Laptev G.I. *Kvazilineinye parabolicheskie uravneniya vtorogo poryadka s integralnymi koeffitcientami* [Quasilinear parabolic equations of the second order with integral coefficients] // Reports of the USSR Academy of Sciences. 1987. Vol. 293. No. 2. Pp. 306–39.

2. *Grotta Ragazzo C.* Chaos and integrability in a nonlinear wave equation // Journal of Dynamics and Differential Equations. 1994. Vol. 6. No. 1. Pp. 227–244.

3. Boziev O.L. *Reshenie nelineinogo giperbolicheskogo uravneniya priblizhonno-analiticheskim metodom* [Solution of nonlinear hyperbolic equation by an approximate analytical method] //

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics. 2018. No. 51. Pp. 5-14. DOI 10.17223/19988621/51/1.

4. Boziev O.L. *Approksimatsiya reshenii nelineinogo parabolicheskogo uravneniya resheniyami assotsiirovannogo nagruzhennogo uravneniya* [Approximation of nonlinear parabolic equations solutions by solutions of associated loaded equations] // Nonlinear World. 2018. No. 4. Pp. 3–10. DOI 10.18127/j20700970-201804-01.

5. Lions J.-L. *Nekotoryye metody resheniya nelineynykh krayevykh zadach* [Some methods for solving nonlinear boundary value problems]. M.: Mir, 1972. P. 736.

6. Martinson L.K., Malov Yu.I. *Differehtsialnye uravnenia matematicheskoi fiziki* [Differential Equations of Mathematical Physics]. M.: MGTU Publ. 2002. 368 p.

ON AN APPROXIMATE METHOD FOR SOLVING LOADED EQUATIONS OF HYPERBOLIC AND PARABOLIC TYPES

O.L. BOZIEV

Institute of Computer Science and Problems of Regional Management –
Branch of Federal public budgetary scientific establishment «Federal scientific center
«Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences»
360000, KBR, Nalchik, 37-a I. Armand str.
E-mail: iipru@rambler.ru

Examples of the implementation of an approximate method for solving loaded partial differential equations are described. In the first case, the hyperbolic equation contains an integer degree of the modulus of the solution under the sign of the integral over the spatial variable. In the second example, a similar load is contained in the lower term of the parabolic equation. In the process of solving initial boundary value problems, a priori estimates of the solution are established, which are later used to linearize the corresponding equations. The transition from it to the associated ordinary differential equations is made. The solutions of the latter are used to construct solutions to the original problems. The method of selecting the indefinite constants that arise when establishing a priori estimates is demonstrated.

Keywords: power-law nonlinearity, loaded equation, a priori estimate, approximate solution.

Received by the editors 09.02.2021

For citation. Boziev O.L. On an approximate method for solving loaded equations of hyperbolic and parabolic types // News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS. 2021. No. 2 (100). Pp. 5-10.

Сведения об авторе:

Бозиев Олег Людинович, к.ф.-м.н., доцент, с.н.с. Института информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского научного центра РАН; доцент кафедры информационной безопасности института информатики, электроники и робототехники Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х.М. Бербекова.

360000, КБР, г. Нальчик, ул. И. Арманд, 37-а.

E-mail: boziev@yandex.ru

Information about the autor:

Boziev Oleg Ludinovich, Candidate of Physical and Mathematical sciences, senior staff scientist of Institute of Computer Science and Problems of Regional Management of Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences; associate professor at the Information Security Department, Institute of Informatics, Electronics and Computer Technologies, Kabardino-Balkarian State University.

360000, KBR, Nalchik, 37-a I. Armand str.

E-mail: boziev@yandex.ru.