УДК 330.42; 51-77
DOI: 10.35330/1991-6639-2020-1-93-35-45

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕРАВНОВЕСНЫХ ПРОЦЕССОВ В МОНЕТАРНОЙ ЭКОНОМИКЕ МЕТОДОМ ПОГРУЖЕНИЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ПРОЦЕСС

Х.Х. КАЛАЖОКОВ, Ф.Х. УВИЖЕВА

Институт информатики и проблем регионального управления –
филиал ФГБНУ «Федеральный научный центр
«Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук»
360000, КБР, г. Нальчик, ул. И. Арманд, 37-а
E-mail: iipru@rambler.ru

Работа посвящена решению различных модельных задач исследования неравновесных процессов в монетарной экономике методом погружения в дифференциальный процесс как эффективного инструмента теоретической и практической экономики. Постановка задачи с начальными данными для исследования неравновесных процессов в монетарной экономике осуществлена в рамках базовой модели Фридмена и Фишера и уравнений для зависимости цены от времени. Предложены различные варианты метода погружения в дифференциальный процесс в зависимости от величины значения параметров адаптации: регулярный процесс, сингулярный (тихоновский) процесс, сингулярный процесс смешанного типа и метод погружения в дробный дифференциальный процесс. После приведения задачи к безразмерным параметрам получена нелинейная задача с начальными данными для системы уравнений в частных производных гиперболического типа. Рассмотрены сингулярная модельная задача, стационарная модельная задача, модельная задача для уравнений в частных производных первого порядка, а также безразмерные системы уравнения монетарной экономики с учетом нелинейной динамики для цены. Предложенные постановки задач после погружения в дифференциальный процесс решаются стандартными методами вычислительной математики. Доказана единственность решения модельной задачи, описывающей свободные колебательные процессы в неравновесной системе с использованием специальной «потенциальной» функции.

Ключевые слова: неравновесный процесс, монетарная экономика, метод погружения в дифференциальный процесс, метод инвариантного погружения, регулярный процесс, сингулярный процесс, дробный неравновесный процесс.

Согласно современным представлениям экономико-математические модели наряду с информационными и экспертно-логическими системами являются эффективным инструментом теоретической и практической экономики [1]. Сфера экономико-математических исследований в настоящее время относится к фундаментальным основам экономических исследований, и ее развитие является необходимой предпосылкой развития экономической науки в целом. Таким образом, необходимость построения и применения математических моделей для решения задач анализа, синтеза, прогнозирования и получения новой информации относительно экономических процессов на базе учета взаимосвязи основных компонентов функционирования экономики вида «экономическая теория – экономическая политика – хозяйственная практика» стимулирует исследования, направленные на развитие экономико-математического инструментария. В результате в развитии теории математического моделирования экономических процессов наметились два основных направления.

К *первому направлению* отнесем экономико-математические модели, которые разработаны на основе предположения, что в экономике между спросом и предложением возникает равновесие за конечное время, то есть базируется на балансовом соотношении в экономике.

Второе направление составляют экономико-математические модели, которые базируются на предположении, что в экономике между спросом и предложением не возникает равновесное состояние за конечное время, и исследуют неравновесные экономические процессы [2-8]. Экономико-математические модели неравновесных процессов в экономике рассматривались в работах Гранберга (1985), Солоу (1988), Накорякова, Гасенко (2002, 2004), Tobin (1965), Занга (1999), Лебедева (1997).

Одной из наиболее актуальных и нерешенных проблем для экономики развивающихся стран является разработка такой валютно-денежной политики, которая обеспечивала бы возможности для экономического роста страны, стимулируя экономический рост и минимизируя инфляцию.

Существующие на сегодняшний день модели малоприменимы [9], так как зависимость ВВП от капитала даже для стран с развитой рыночной экономикой постоянно сокращается. Для развивающихся стран с небольшим объемом инвестиций данный подход тем более неприемлем.

Поэтому актуальным остается один из важнейших принципов монетаризма: инфляция не может продолжаться бесконечно без увеличения денежной массы, и ее регулирование – главная, хотя и не единственная функция центрального банка.

Известно, что в состоянии стабильного равновесия экономические системы бывают крайне редко, а динамика экономики стран часто рассматривается как движение от одного неравновесного состояния к другому. Достаточно разработанными собственными теоретическими приемами изучения неравновесных процессов наука, по сведениям авторов, не располагает. Это связано с тем, что существующие модели не дают качественного представления о происходящих в динамике процессах. То есть модели дают лишь возможность получать сухие числовые характеристики, а не описывают качественные показатели этих характеристик, например, такие как частота или амплитуда их колебаний, асимптоты, к которым они стремятся, и скорость затухания колебаний этих характеристик. Такие качественные показатели могут существенно расширить интерпретацию результатов экономических моделей монетарной экономики. Целью данного исследования является продвижение в направлении совершенствования данного методического аппарата.

В настоящей работе рассматриваются вопросы исследования неравновесных процессов в монетарной экономике методом погружения в дифференциальные процессы. Основная идея метода погружения связана с причинностью погружаемых уравнений по варьируемому параметру, когда решение исследуемой задачи определяется только исходя из предыдущих значений параметра уравнений и независимо от последующих. Этот метод позволяет свести краевую задачу к задаче с начальными данными, которая и обладает свойством динамической причинности и более удобна для численного решения и дальнейшего качественного анализа.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу исследования неравновесных процессов в монетарной экономике с помощью базовой модели Фридмена и Фишера, а также уравнение для зависимости цены от времени.

В области $t_0 < t < T$ евклидовой прямой независимой переменной t рассмотрим математическую постановку задачи в виде [10]:

$$\bar{u}_1(t) = \frac{v}{\bar{p}}\bar{Q}_1(t), \tag{1}$$

$$\bar{u}_2(t) = \frac{v}{\bar{p}}\bar{Q}_2(t) \ , \tag{2}$$

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{t}} = \left[\begin{array}{c} \bar{\gamma}(\bar{u}_2 - \bar{u}_1), \\ R[\Phi(\bar{t})], \\ \bar{r}F[\Phi(\bar{t})] + (1-\bar{r})F[\Phi(\bar{t}-1)], \\ \bar{A}exp\{\bar{r}(\bar{u}_2 - \bar{u}_1)\}, \end{array} \right. \tag{3}$$

где

$$\Phi = \bar{r}(\bar{u}_2 - \bar{u}_1)\ , R(\Phi) = \bar{a}\Phi(1-\Phi), \tag{4}$$

$$F(\Phi) = \bar{A}\Phi \exp{(-\Phi)}\ , \bar{p}(t_0) = \bar{p}_0.$$

Третье уравнение в (3) записано для дискретного времени $t = 1,2,3, \ldots$

В задаче (1) – (4) использованы следующие обозначения:

$\bar{u}_1$ и $\bar{u}_2$ – реальные величины предложения товаров и услуг потребления соответственно;

$\bar{Q}_1$ и $\bar{Q}_2$ – номинальные денежные массы;

v – скорость обращения денег;

$\bar{p}$ – цены товаров;

$\bar{\gamma}, \bar{r}, \bar{A}, \bar{a}$ – заданные параметры.

Задача (1) – (3) представляет собой систему дифференциальных уравнений макроэкономики в частных производных гиперболического типа для совокупного потребления и предложения, являющихся функциями двух независимых переменных – времени и индекса цен. Здесь экономика стремится к равновесному состоянию в сферах предложения и потребления, но не достигает его.

Заметим, что для описания зависимости цены от времени t используются четыре варианта уравнений (3): линейное уравнение Вальраса и три варианта нелинейных уравнений для зависимости цены от времени.

Таким образом, для рассматриваемой задачи монетарной экономики получена задача с начальными данными (1) – (4), которая анализируется известными стандартными численными методами вычислительной математики.

2. Преобразование основных уравнений монетарной экономики методом погружения в дифференциальный процесс

Рассмотрим различные варианты процессов монетарной экономики от простых к более сложным. Предполагая, что при средней цене $\bar{p}$ на рынке равновесие между спросом и предложением денежной массы отсутствует, погрузим соотношения (1) и (2) в дифференциальный процесс [10-14]. Тогда для исследования динамики взаимодействия между спросом и предложением (например, в случае нестационарных процессов в экономике) получим следующие дифференциальные уравнения в частных производных:

$$\frac{d\bar{u}_1}{d\bar{t}} = \bar{\alpha}(\frac{v}{\bar{p}}\bar{Q}_1(\bar{t}) - \bar{u}_1(\bar{t})), \tag{5}$$

$$\frac{d\bar{u}_2}{d\bar{t}} = \bar{\beta}(\frac{v}{\bar{p}}\bar{Q}_2(\bar{t}) - \bar{u}_2(\bar{t})), \tag{6}$$

где $\bar{\alpha}, \bar{\beta} = const$ – параметры адаптации.

Рассмотрим теперь различные варианты метода погружения в дифференциальный процесс в зависимости от величины значения параметров $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$.

1. Если параметры $(\bar{\alpha},\ \bar{\beta})$ – малые величины, то динамический процесс (5) – (6) представляет собой регулярный процесс [15, гл. IV, с. 226-291; 16].

2. Если же параметры $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ – большие величины, тогда малые параметры $(\frac{1}{\bar{\alpha}}, \frac{1}{\bar{\beta}})$ стоят при старшей производной и дифференциальный процесс представляет собой сингулярный (тихоновский) процесс [15, гл. V, с. 292-346; 17; 18].

3. Если же параметры $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ существенно отличаются по величине, то есть, например, $\bar{\alpha} \ll \bar{\beta}$, то дифференциальный процесс представляет сингулярный процесс смешанного типа с малыми параметрами $\bar{\alpha}$ и $\frac{1}{\bar{\beta}}$.

4. Если дифференциальный процесс рассматривается с учетом процесса зависимости от предыстории или в средах с фрактальной структурой (где расстояние между двумя соседними элементами (парой точек) определяется в смысле Хевисайда), то в левых частях (5) и (6) используются производные дробного порядка, то есть

$$D_{0,\bar{t}}^{\delta}\bar{u}_1 = \bar{\alpha}(\frac{v}{\bar{p}}\bar{Q}_1 - \bar{u}_1), \tag{7}$$

$$D_{0,\bar{t}}^{\delta}\bar{u}_2 = \bar{\beta}(\frac{v}{\bar{p}}\bar{Q}_2 - \bar{u}_2), \tag{8}$$

где δ – порядок дробных производных [19], то есть в этом случае применяем метод погружения в дробный дифференциальный процесс, что даст возможность перейти от системы уравнений с дробными производными к системе уравнений с частными производными.

3. Преобразование основной задачи монетарной экономики к безразмерным величинам

Преобразование основной задачи к безразмерным величинам применимо тогда, когда известно математическое описание процесса. Разделив все независимые и зависимые переменные на некоторые их характерные значения (масштабы), осуществляем переход к безразмерным величинам. В результате математическое описание процесса приводится к безразмерному виду. При этом масштабы, а также физические константы, входящие в задачу, объединяются в безразмерные комплексы.

Для простоты дальнейших рассуждений приведем задачу (5), (6), (3) и (4) к безразмерному виду, используя характерные величины зависимых и независимых переменных. Заметим, что в соотношении (3) в рассматриваемой задаче используется первый вариант, то есть уравнение Вальраса для цены. Вводим безразмерные величины по формулам:

$$\bar{u}_1 = U_M u_1, \bar{u}_2 = U_M u_2, \bar{p} = P_M p, \bar{t} = T_M t, T_M = \frac{P_M}{\bar{\gamma} U_M}, \tag{9}$$

где U_M, P_M, T_M – масштабные (характерные) значения соответствующих величин (например, их математические ожидания). После перехода к безразмерным величинам по формулам (9) с учетом полной формулы производной функций $\bar{u}_1$ и $\bar{u}_2$ двух переменных t и p задача (3) – (6) примет вид:

Задача 1. Система уравнений вида

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + (u_2 - u_1)\frac{\partial u_1}{\partial p} = \alpha(\frac{Q_1}{\bar{p}} - u_1)\ , \tag{10}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + (u_2 - u_1)\frac{\partial u_2}{\partial p} = \beta(\frac{Q_2}{\bar{p}} - u_2)\ , \tag{11}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = u_2 - u_1\ . \tag{12}$$

Начальные условия:

$$u_1(t_0) = u_1^0;\ u_2(t_0) = u_2^0;\ P(t_0) = P_0. \tag{13}$$

Здесь $u_1 = u_1(t, p)$, $u_2 = u_2(t, p)$ – функции двух переменных.

В безразмерной задаче (10) – (13) использованы следующие обозначения:

$$Q_1 = \frac{v\bar{Q}_1}{P_M U_M};\ Q_2 = \frac{v\bar{Q}_2}{P_M U_M};\ \alpha = \frac{\bar{\alpha} P_M}{\bar{\gamma} U_M};\ \beta = \frac{\bar{\beta} P_M}{\bar{\gamma} U_M},$$

где α и β – безразмерные параметры задачи (10) – (13).

Таким образом, задача (10) – (13) представляет собой нелинейную задачу с начальными данными для системы уравнений в частных производных гиперболического типа с параметрами α и β.

4. Некоторые постановки задач монетарной экономики

4.1. Сингулярная модельная задача

Рассмотрим модельные задачи, которые получаются из общей задачи (10)-(13) при различных упрощающих предположениях.

Предположим, что цена товара p в рассматриваемом монетарном процессе экономики не меняется, то есть p=const. В этом случае при условии, что $u_2 - u_1 \neq 0$, из уравнения Вальраса ($\frac{d\bar{p}}{d\bar{t}} = \bar{\gamma}(\bar{u}_2 - \bar{u}_1)$) следует, что $\bar{\gamma} \to 0$, и, следовательно, для неравновесных процессов имеем $\alpha \to \infty$ и $\beta \to \infty$. В этом случае неравновесный процесс описывается модельной задачей с начальными данными для системы сингулярных обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{1}{\alpha}\frac{du_1}{dt} = \frac{Q_1}{p} - u_1, \tag{14}$$

$$\frac{1}{\beta}\frac{du_2}{dt} = \frac{Q_2}{p} - u_2, \tag{15}$$

$$u_1(t_0) = u_1^0,\ u_2(t_0) = u_2^0, \tag{16}$$

где $p = const$ – заданное число.

В задаче (14) – (16) малые параметры $\frac{1}{\alpha}$ и $\frac{1}{\beta}$ состоят при старшей производной и описывают сингулярный (тихоновский) процесс (спонтанные, самоорганизующиеся социальные процессы, «системы с управлением», а также используемые и потенциально эффективные технологии управления).

Основные трудности, возникающие при численном решении задач с начальными данными указанного типа, – наличие внутренних колебательных процессов, нелинейных процессов разных масштабов, внутренних пограничных слоев и т.д., значительно влияющих на устойчивость системы

Заметим, что для сингулярно-возмущенных задач с начальными данными предложен метод асимптотического анализа решения в классической работе А.Н. Тихонова [17]. Технические вопросы построения приближенных решений тихоновских задач с начальными данными известны и рассмотрены в работах [16, 20].

4.2. Стационарная модельная задача

Стационарный вариант общей задачи для неравновесных процессов (10) – (13) после простых преобразований (деление (10) на (11)) на основе упрощающих предположений примет вид:

$$\left\{ \frac{\partial u_1}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial u_2} + \frac{u_2-u_1}{u_2-u_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial u_2} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{Q_1-u_1\bar{p}}{\bar{p}}\cdot\frac{\bar{p}}{Q_2-u_2\bar{p}}\right\}$$

$$\frac{du_1}{du_2} = \frac{\alpha}{2\beta}\frac{Q_1 - pu_1}{Q_2 - pu_2};$$

$$\frac{dp}{dt} = u_2 - u_1 \ (u_1 \neq u_2); \tag{17}$$

$$u_1(0) = u_1^0,$$

$$u_2(0) = u_2^0;$$

$$p(t \neq 0) = p_0,$$

где $Q_2 - pu_2 \neq 0$; $\beta \neq 0$.

Задача (17) эквивалентна задаче с начальными данными для системы трех ОДУ:

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{\alpha}{\beta}(Q_1 - pu_1);$$

$$\frac{du_2}{dt} = Q_2 - pu_2; \tag{18}$$

$$\frac{dp}{dt} = u_2 - u_1;$$

$$u_1(0) = u_1^0; u_2(0) = u_2^0; p(0) = p_0.$$

Задачи (17) и (18) легко решаются численно стандартными методами, например, методом Рунге-Кутта.

4.3. Модельная задача для уравнений в частных производных первого порядка

Вычтем теперь из первого уравнения (10) второе уравнение (11) и проведем некоторые преобразования полученных результатов на основе упрощающих предположений относительно параметров ($\alpha = \beta$) задачи:

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial t}\right) + (u_2 - u_1)\left(\frac{\partial u_1}{\partial p} - \frac{\partial u_2}{\partial p}\right) = \alpha\left(\frac{Q_1}{p} - u_1\right) - \beta\left(\frac{Q_2}{p} - u_2\right),$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} - w\frac{\partial w}{\partial p} = \frac{\alpha}{p}(Q_1 - Q_2) - \alpha w.$$

Получим следующую модельную задачу для уравнений в частных производных первого порядка, описывающую приближенно динамику неравновесных процессов:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - w\frac{\partial w}{\partial p} + \alpha w - \frac{\alpha Q}{p} = 0; \tag{19}$$

$$w(0) = w_0(p);$$

где $w = u_1 - u_2$, $Q = Q_1 - Q_2$, $\alpha = \beta$, $p \neq 0$.

Заметим, что задача (19) методом характеристик эквивалентно преобразуется к задаче с начальными данными для системы двух уравнений ОДУ:

$$\frac{dw}{dt} = \alpha w - \frac{\alpha Q}{p}; \ (p \neq 0);$$

$$\frac{dp}{dt} = u_2 - u_1 = -w;$$

$$w(0) = w_0, p(0) = p_0,$$

где $Q = Q_1 + Q_2$.

4.4. О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ МОНЕТАРНОЙ ЭКОНОМИКИ С ПОМОЩЬЮ «ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ» ФУНКЦИИ

Предположим, что функции u_1 и u_2 обладают свойством, что существует функция $\varphi(t,p)$, обладающая свойством

$$u_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial t}, u_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial p}. \tag{20}$$

Равенство (20) означает существование аналога потенциальной функции. В терминах потенциальной функции уравнения (10) и (11) принимают вид:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\alpha Q_1}{p} + (u_1 - u_2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial t};$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial p} + \beta\frac{\partial\varphi}{\partial p} = \frac{\beta Q_2}{p} + (u_1 - u_2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2}.$$

Исключая из системы уравнений $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial p}$, получим:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial t} + (u_1 - u_2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial p} + \beta(u_1 - u_2)\frac{\partial\varphi}{\partial p} = \frac{\alpha Q_1}{p} + (u_1 - u_2)\frac{\beta Q_2}{p} +$$

$$+(u_1 - u_2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial p} + (u_1 - u_2)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2},$$

или

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - (u_1 - u_2)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} + \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \beta(u_1 - u_2)\frac{\partial\varphi}{\partial p} = \frac{\alpha Q_1}{p} + (u_1 - u_2)\frac{\beta Q_2}{p}.$$

Таким образом, система уравнений (10) и (11) монетарной экономики преобразована в одно уравнение в частных производных гиперболического типа на плоскости (t, p). Это уравнение может служить эффективным средством получения качественных выводов по монетарной экономике и корректной постановки различных задач экономики.

Если переписать старшие производные уравнения (20) в виде уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа, то получим:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - (u_1 - u_2)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} = 0, \tag{21}$$

которое описывает свободные колебательные процессы в неравновесной системе. Общий интеграл уравнения (21) по формуле Даламбера имеет вид:

$$\varphi(t,p) = f_1(p + at) + f_2(p - at), \tag{22}$$

где $a^2 = (u_1 - u_2)^2 \neq 0$, f_i $(i = 1,2)$ – дважды дифференцируемые функции.

Пусть начальные условия задачи для уравнения (21) имеют вид:

$$\varphi(0,p) = \varphi_0(p), \varphi_t(0,p) = \psi_0(p). \tag{23}$$

Из равенств (22) и (23) находим общее решение задачи (21) и (23) по Даламберу:

$$\varphi(t,p) = \frac{\varphi_0(p+at) + \varphi_0(p-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{p-at}^{p+at}\psi_0(z)dz, \tag{24}$$

где z – переменная интегрирования.

Таким образом, в предположении существования решения задачи (21) и (23) нашли решение этой задачи в форме (24). Эта формула доказывает единственность решения. Следовательно, формула (24) играет большую роль для качественной формулировки различных задач монетарной экономики, так как дает представление о колебательных процессах в монетарной экономике.

5. Безразмерные системы уравнения монетарной экономики с учетом нелинейной динамики для цены

Рассмотрим уравнения монетарной экономики в безразмерных величинах, когда динамика цены товаров описывается четвертым вариантом формулы (3), то есть нелинейным уравнением. Тогда основная задача с начальными данными экономики принимает вид:

Задача 2. Система уравнений:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}+\left(\frac{dp}{dt}\right)\frac{\partial u_1}{\partial p}=\alpha(\frac{Q_1}{p}-u_1),$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}+\left(\frac{dp}{dt}\right)\frac{\partial u_2}{\partial p}=\beta(\frac{Q_2}{p}-u_2),$$

$$\frac{dp}{dt}=exp\{r(u_2-u_1)\},$$

где $\bar{A}\frac{T_M}{P_M}=1,\, r=\bar{r}U_M$ – дополнительные безразмерные величины задачи 2.

Начальные условия:

$$u_1(t_0)=u_1^0,\, u_2(t_0)=u_2^0,\, P(t_0)=P_0.$$

Постановка задачи 2 представляет собой задачу с начальными данными для гиперболической системы дифференциальных уравнений в частных производных на плоскости *(t, p)*, решение которой также возможно известными вычислительными методами.

Заключение

Как видно, метод дифференциального погружения в принципе отличается от стандартного подхода по нахождению частных решений дифференциальных уравнений. Такой процесс преобразований позволяет установить связь решений близких задач и таким образом качественнее изучать исследуемые процессы, являясь эффективным инструментом численного анализа исследуемых процессов. В работе предложен довольно оригинальный способ применения метода погружения в дифференциальный процесс для изучения неравновесных процессов монетарной экономики. Представлены различные постановки задач монетарной экономики и показано, как, используя метод дифференциального погружения, можно преобразовать их в задачи с начальными данными, что существенно облегчает идентификацию асимптотики решений задач исследования неравновесных процессов в контексте анализа экономико-математических моделей на их основе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Клейнер Г.В.* Экономико-математическое моделирование и экономическая теория // Экономика и математические методы. 2001. Том 37. №3. С. 111-126.

2. *Гранберг А.Г.* Динамические модели народного хозяйства. М.: Экономика. 1985. 240 с.

3. *Solow R.* Growth Theory and After The American Economic Review. Vol. 78. 1988. Pp. 307-317.

4. *Накоряков В.Е., Гасенко В.Г.* Математическая модель плановой макроэкономики // Экономика и математические методы. 2002. Т. 38. № 2. С. 1-13.

5. *Накоряков В.Е., Гасенко В.Г.* Кинетическая модель инфляции // Экономика и математические методы. 2004. Т. 40. № 1. С. 129-134.

6. *Занг В.-Б.* Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории. М.: Мир. 1999. 335 с.

7. *Тобин В.Н.* Комплекс макроэкономических моделей инфляции // Экономика и математические методы. 2001. Т. 37. № 3. С. 15-29.

8. *Лебедев В.В.* Математическое моделирование социально-экономических процессов. М.: Изограф. 1997. 224 С.

9. *Малков С.Ю., Давыдова О.И., Билюга С.Э.* Макроэкономическая производственная функция: эмпирический межстрановый анализ. Анализ и моделирование мировой и страновой динамики: экономические и политические процессы. 2016. С. 7-26.

10. *Накоряков В.Е., Гасенко В.Г.* Уравнения макроэкономики в частных производных // Экономика и математические методы. 2008. Т. 44. № 3. С. 79-91.

11. *Friedman M., Schwartz A.J.* A Monetary History of the United States 1867-1960. N. Y.: 1963. Princeton University Press. 888 p.

12. *Friedman M., Schwartz A.J.* Monetary Trends in the United States and the United Kingdom: Their Relation to Income, Prices and Interest Rates. 1876-1975. Chicago: 1982. University of Chicago Press. Pp. 3-12.

13. *Dornbusch R., Fisher S.* Stopping Hyperinflations: Past and Present. 1986. Weltwirtscha-ftliches Archive. Vol. 122. April. Pp. 1-47.

14. *Мэнкью Н.Г.* Макроэкономика. М.: Издательство МГУ, 1994. 736 с.

15. *Моисеев Н.Н.* Математические задачи системного анализа. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1981. 488 с.

16. *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. Издание 2-е. М., 1950. 434 с.

17. *Тихонов А.Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Математический сборник. 1952. 31 (73). С. 575-586.

18. *Васильева А.Б., Бутузов Н.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 172 с.

19. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

20. *Кащенко С. А.* Асимптотические законы распределений собственных значений периодической и антипериодической краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка // Моделирование и анализ информационных систем. 2017. 24(1). С. 13-