УДК 517.23
MSC 37N30, 37N40
*DOI: **10.35330**/1991-6639-2020-1-93-57-62*

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ С ПРОИЗВОДНОЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА КАК МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ СОЛНЕЧНОЙ АКТИВНОСТИ

Д.А. ТВЁРДЫЙ

Институт прикладной математики и автоматизации –
филиал ФГБНУ «Федеральный научный центр
«Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук»
360000, КБР, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А
E-mail: ipma@niipma.ru

В работе с помощью математической модели исследуется динамика солнечной активности 23-го и 24-го циклов на стадии подъема. Математическая модель представляет собой задачу Коши для уравнения Риккати с производной дробного порядка. Решение этой математической модели дается численно с помощью метода Ньютона. Полученное решение сопоставляется с экспериментальными данными солнечной активности 23-го и 24-го циклов на стадии подъема. Далее с помощью метода наименьшего квадрата выбирается оптимальное значение порядка дробной производной, при котором коэффициент детерминации достигает максимального значения. Показано, что предложенная модель хорошо согласуется с динамикой солнечной активности 23-го и 24-го циклов в период подъема и позволяет выделить его тренд. Сделано предположение, что динамика солнечной активности на стадии подъема может обладать эффектами памяти.

Ключевые слова: дробное исчисление, наследственность, численные методы, солнечная активность, уравнение Риккати.

Введение

Исследование динамических систем с наследственностью или памятью имеет важное значение. Например, динамическим процессам с памятью (эредитарные процессы) посвящена глава в монографии [1]. Свойство памяти динамической системы заключается в зависимости текущего состояния от ее предыдущих состояний (предыстории). Эффекты в памяти обычно описываются с помощью интегро-дифференциальных (эредитарных) уравнений с разностными ядрами, которые называются функциями влияния или памяти. Такие эредитарные уравнения использовались в наследственной механике при исследовании вязко-упругих и вязко-пластичных сред [2]. Определенный интерес представляет более узкий класс эредитарных уравнений – уравнения с производными дробных порядков [3]. Уравнения с производными дробных порядков характеризуются степенной функцией памяти, что дает возможность использовать хорошо развитый математический аппарат дробного исчисления [4].

В настоящей работе предложено исследование динамики солнечной активности 23-го и 24-го циклов на стадии подъема с помощью модельного уравнения Риккати с производной дробного порядка и непостоянными коэффициентами [5, 6]. Подобные исследования уже проводились, например, в работе [7]. Однако в этой работе модельное уравнение Риккати с производной дробного порядка было с постоянными коэффициентами, а также была исследована динамика солнечной активности в период 1998-2010 гг. и установлена ее связь с селевыми потоками в Кабардино-Балкарской Республике.

Постановка задачи

Рассмотрим следующее эредитарное уравнение, которое является аналогом уравнения

Риккати:

$$\int_0^t K(t-\tau)\dot{u}(\tau)d\tau + a(t)u^2(t) + b(t)u(t) + c(t) = 0, \quad (1)$$

где $K(t-\tau)$ – функция памяти, $t \in [0,T], T > 0$ – время моделирования, $u(t)$ – функция решения, $a(t), b(t), c(t)$ – коэффициенты рассматриваемого уравнения, заданные функции, $\dot{u}(t) = du/dt$.

Отметим, что если функция памяти $K(t-\tau)$ является функцией Хевисайда, то можно говорить, что процесс обладает полной памятью, если это функция Дирака, то память отсутствует. Поэтому будем рассматривать функцию памяти в виде степенной функции:

$$K(t-\tau) = \frac{(t-\tau)^{-\alpha(t)}}{\Gamma(1-\alpha(t))}, 0 < \alpha(t) < 1, \quad (2)$$

где $\Gamma(1-\alpha(t))$ – гамма-функция Эйлера.

Подставив функцию памяти (2) в эредитарное уравнение (1), получим следующее интегро-дифференциальное уравнение, называемое эредитарным уравнением Риккати:

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha(t))}\int_0^t \frac{\dot{u}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha(t)}}d\tau + u^2(t) - 1 = 0. \quad (3)$$

В уравнении (3) введем следующее обозначение:

$$\partial_{0t}^{\alpha(t)}u(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha(t))}\int_0^t \frac{\dot{u}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha(t)}}d\tau, \quad (4)$$

которое является обобщением дробной производной Герасимова-Капуто [8].

Необходимо отметить, что существуют другие определения производной дробного переменного порядка [6, 7]. Мы же остановимся на определении (4) и запишем уравнение (3) в компактной форме:

$$\partial_{0t}^{\alpha(t)}u(\tau) + a(t)u^2(t) + b(t)u(t) + c(t) = 0, u(0) = const. \quad (5)$$

Заметим, что при значении $\alpha(t) = 1$ уравнение (5) переходит в классическое уравнение Риккати с непостоянными коэффициентами.

Вследствие вышесказанного постановка задачи для эредитарного уравнения Риккати (1) в данном случае свелась к задаче Коши (5).

Методика решения

В настоящей статье мы будем рассматривать случай $\alpha(t) = \alpha = const$. Так как задача Коши (5) в общем случае не имеет точного решения, то будем использовать численные методы для ее решения. Для этого разобьем временной отрезок $t \in [0,T]$ на N равных частей, где $\tau = \frac{T}{N}$ – шаг дискретизации, и получим, что $t_k = k\tau, k = 0,\ldots,N-1$, а функция решения $u(t_k) = u_k$. Аппроксимацию дробной производной (4) проведем в виде:

$$\partial_{0t}^{\alpha(t)}u(\tau) \approx \sigma_{\alpha,\tau}\sum_{i=1}^{k} \omega_{i,\alpha}(u_{k-i+1} - u_{k-i}),\ k = 1,\ldots,N-1, \quad (6)$$

где весовые коэффициенты равны

$$\sigma_{\alpha,\tau} = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)},\ \omega_{i,\alpha} = i^{1-\alpha} - (i-1)^{1-\alpha}.$$

Можно показать, что аппроксимация (6) имеет первый порядок. Задачу Коши (5) перепишем в разностной постановке:

$$\sigma_{\alpha,\tau} \sum_{i=0}^{k} \omega_{i,\alpha}(u_{k-i+1} - u_{k-i}) + a_k u_k^2 + b_k u_k + c_k = 0, u_0 = const. \quad (7)$$

Получили систему нелинейных алгебраических уравнений, алгоритм решения которой был реализован в программе NSFDRE [9]. В настоящей работе решение находится методом Ньютона и реализовано в системе Maple 17.

Расчетная кривая принимает вид логистической кривой в том числе за счет особого характера поведения коэффициентов $(-1 < a < 0), (b = 0), (0 < c < 1)$ в (5), что достигается устремлением значений коэффициентов от 0 к их макс.(мин.) значениям с каждым шагом решения задачи. А именно:

$$a_k = -\frac{k}{N\frac{\sqrt{N}}{2}}, b_k = 0, c_k = \frac{k}{N\frac{\sqrt{N}}{2}}.$$

Результаты моделирования

Применим описанную модель для аппроксимации данных наблюдений за активностью текущего 24-го цикла солнечной активности в период с января 2009 г. по настоящее время, т.е. почти за 11 лет с шагом в 1 месяц. А также рассмотрим 23-й цикл, с мая 1996 г. по декабрь 2009 г. Данные по таким процессам были получены из базы World Data Center for the production, preservation and dissemination of the international sunspot number с сайта проекта Sunspot Index and Long-term Solar Observations [10].

Как ранее отмечалось, для данной задачи $\alpha(t) = \alpha = const$ на протяжении всего численного эксперимента. Значение порядка дробной производной α определяется методом наименьшего квадрата с целью получить наибольший коэффициент детерминации между решением и экспериментальными данными. В данном случае установлено, что при $\alpha = 0.5$ достигается наибольший коэффициент детерминации R^2. Для 23-го цикла (рис. 1) это $R^2 = 0.913$, а для 24-го цикла (рис. 5) это $R^2 = 0.882$.

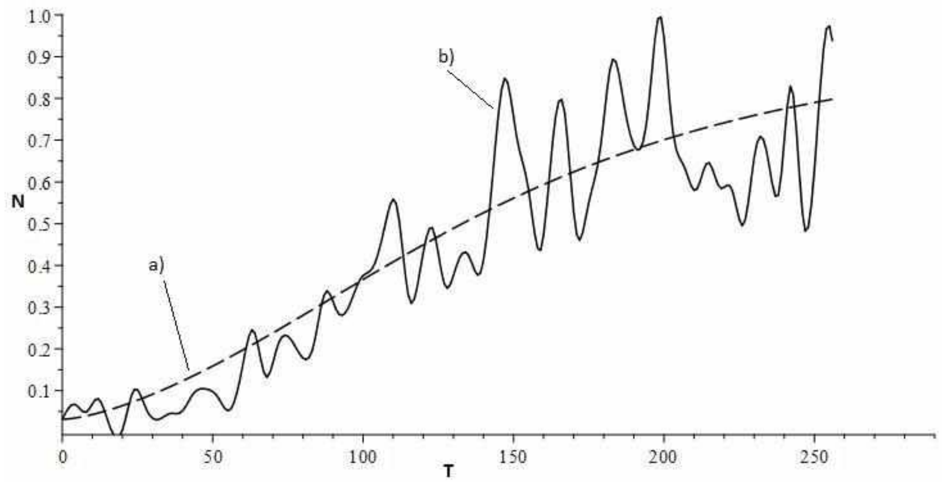

Рис. 1. *Численный эксперимент для 23-го цикла.* $N = 257, \tau = 1, \alpha = 0.5, u[0] = u_0 = 0.031.$
a) – решение, b) – данные.

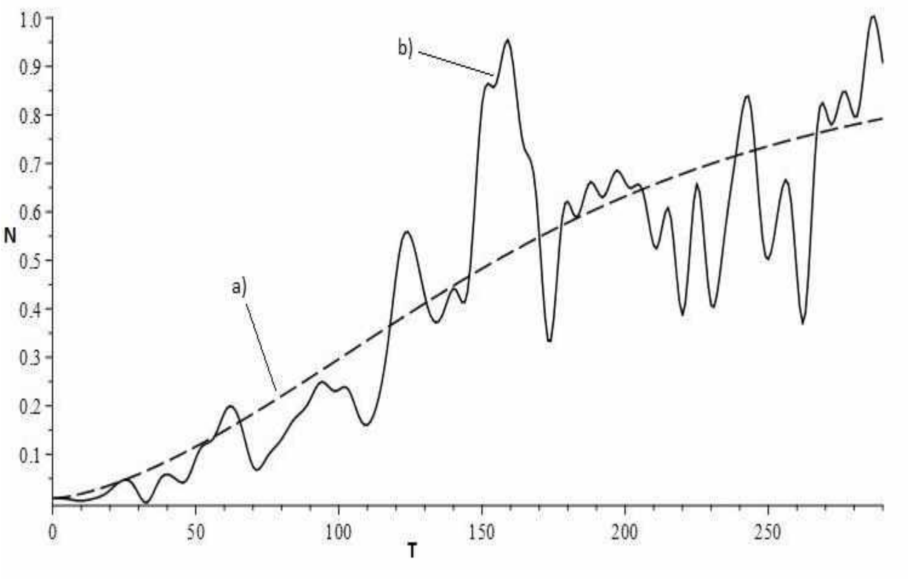

Рис. 2: *Численный эксперимент для 24-го цикла.* $N = 291$, $\tau = 1$, $\alpha = 0.5$, $u[0] = u_0 = 0.008$.
a) – решение, b) – экспериментальные данные

Заключение

В работе исследована динамика солнечной активности 23-го и 24-го циклов на стадии подъема с помощью математической модели, основанной на уравнении Риккати с производной дробного порядка и непостоянными коэффициентами. Показано, что при оптимальном выборе порядка дробной производной расчетные данные хорошо согласуются со сглаженными экспериментальными данными. Это, с одной стороны, позволяет выделить тренд, а с другой – указывает на то, что динамика солнечной активности на стадии подъема может обладать эффектами памяти.

Дальнейшее развитие работы связано с уточнением предложенной модели в случае, когда $\alpha(t)$ – произвольная ограниченная функция из диапазона от 0 до 1. Это позволит более гибко моделировать динамику солнечной активности на стадии подъема.

Работа проводилась при финансовой поддержке гранта РФФИ мол_нр № 19-31-50027 и по теме «Математическое моделирование некоторых физических процессов с помощью эредитарного уравнения Риккати».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Учайкин В.В.* Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.
2. *Герасимов А.Н.* Обобщение линейных законов деформации и их приложение к задачам внутреннего трения // АН СССР. Прикладная математика и механика. 1948. Т. 12. С. 529-539.
3. *Паровик Р.И.* Математическая модель широкого класса осцилляторов с памятью // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. Моделирование и программирование. 2018. Т. 11. № 2. С. 108-122.
4. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
5. *Твёрдый Д.А.* Задача Коши для уравнения Риккати с непостоянными коэффициентами и учетом переменной степенной памяти // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2018. 3(23). С. 148-157.
6. *Твёрдый Д.А.* Математическое моделирование некоторых логистических законов с помощью эредитарной динамической системы Риккати // Материалы XI Всероссийской

научной конференции с международным участием: в 2-х томах. Самара. 2019. Т. 1. С. 348-352.

7. *Бураев А.В.* Некоторые аспекты математического моделирования региональных проявлений солнечной активности и их связи с экстремальными геофизическими процессами // Доклады Адыгской (Черкесской) международной академии наук. 2010. Т. 12. 1. С. 88-90.

8. *Паровик Р.И.* Математическое моделирование нелинейных эредитарных осцилляторов. П-Камчатский: КамГУ им. Витуса Беринга. 2015. 137 с.

9. *Твёрдый Д.А.* Программа численного расчета задачи Коши для уравнения Риккати с производной дробного переменного порядка // Фундаментальные исследования. 2017. № 8(1). С. 98-103.

10. Данные SILSO. Королевская обсерватория Бельгии (ROB), Брюссель, 2013 г. url: http://www.sidc.be/silso/datafiles#total (accessed 10 октября 2019 г.).