

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ОСЦИЛЛЯТОРА ДУФФИНГА С ПРОИЗВОДНОЙ ПЕРЕМЕННОГО ДРОБНОГО ПОРЯДКА¹

В.А. КИМ^{1,2,3}, Р.И. ПАРОВИК^{3,4}

¹ Камчатский государственный технический университет
683003, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Ключевская, 35
E-mail: kamchatgtu@kamchatgtu.ru

² Институт прикладной математики и автоматизации –
филиал ФГБНУ «Федеральный научный центр
«Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук»
360000, КБР, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А
E-mail: ipma@niipma.ru

³ Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга
683032, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4
E-mail: kamgu.ru

⁴ Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН
684034, Камчатский край, Елизовский район, с. Паратунка, ул. Мирная, 7
E-mail: www.ikir.ru

В работе проведено исследование математической модели осциллятора типа Дуффинга с производной переменного дробного порядка Римана-Лиувилля. С помощью метода гармонического баланса были найдены алгоритмы построения амплитудно-фазовых характеристик. Были построены, амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики. Показана обратная зависимость добротности от порядка дробной производной. Построены поверхности добротности в зависимости от частоты и амплитуды.

Ключевые слова: производная Римана-Лиувилля, производная Грюнвальда-Летникова, осциллограммы, фазовые траектории, амплитудно-частотная характеристика (АЧХ), фазо-частотная характеристика (ФЧХ).

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время широкое развитие получило одно из научных направлений нелинейной динамики – дробная динамика [1]. Она изучает наследственные (эредитарные) свойства динамических систем [2]. Эредитарность (память) – это свойство динамической системы, при котором текущее ее состояние зависит от конечного числа предыдущих состояний. Как показано в работе [3], свойство памяти можно описать с помощью математического аппарата дробного исчисления или с помощью операторов дробной производной. Операторы дробных производных имеют много определений и обладают уникальными свойствами, но все они в той или иной степени описывают эффект памяти, характеризующий информацию о предыдущих состояниях системы. Этот эффект предопределяет дополнительные степени свободы – порядки дробных производных. Такие многопараметрические динамические системы имеют определенные трудности в описании и требуют специальных методов исследования для обнаружения хаотических режимов [2-4].

В работе [5] был рассмотрен осциллятор типа Дуффинга с производной постоянного дробного порядка в диссипативном члене. Было найдено численное решение и построены

¹ Исследование выполнено при поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-50033

фазовые траектории, которые выходили на регулярный или хаотический режимы. С помощью метода гармонического баланса построены амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики.

В работах [10-12, 15-18] исследованы регулярные и хаотические режимы с помощью сечений Пуанкаре и спектра максимальных показателей Ляпунова.

В настоящей работе мы продолжим изучать вынужденные колебания осциллятора типа Дуффинга, но теперь порядок дробной производной будет меняться во времени.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ

Рассмотрим следующую задачу Коши [5]:

$$\ddot{x}(t) + 2\lambda D_{0t}^{q(t)} x(t) + \omega_0^2 x(t) + bx^3(t) = \delta \cos(\omega t), \quad x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y_0, \quad (1)$$

где $x(t) \in C^2(0, T)$ – функция решения, $\ddot{x}(t) = d^2 x(t)/dt^2$, $\dot{x}(t) = dx/dt$, λ – коэффициент трения, δ и ω – амплитуда и частота внешнего периодического воздействия, ω_0^2 – собственная частота системы, b – коэффициент изохронности, x_0, y_0 – заданные константы, определяющие начальные условия, $0 < q(t) < 1$ – непрерывная функция, $t \in [0, T]$ – время, $T > 0$ – время моделирования.

Оператор $D_{0t}^{q(t)} x(t)$ в модельном уравнении (1) имеет вид:

$$D_{0t}^{q(t)} x(t) = \frac{1}{\Gamma(q(t))} \int_0^t x(\tau) (t-\tau)^{q(t)-1} d\tau \quad (2)$$

Оператор дробной производной (2) будем называть оператором производной дробного переменного порядка $q(t)$ типа Римана-Лиувилля.

Переменный порядок $q(t)$ дробной производной типа Римана-Лиувилля определяет интенсивность диссипации энергии в колебательной системе и связан со свойствами среды, в которой происходит колебательный процесс. В случае, когда этот порядок является константой и равен единице, задача Коши (1) переходит в задачу Коши для классического осциллятора Дуффинга.

Рассмотрим зависимость амплитуды A и фазы φ установившихся колебаний для оператора (2) от частоты внешней силы ω . Для вычисления АЧХ и ФЧХ используем метод гармонической линеаризации [5, 17].

Рассмотрим задачу Коши (1). Решение ищем в виде:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) = A \cos(U). \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
D_{0t}^{q(t)} x(\tau) &= \frac{1}{\Gamma(1-q(t))} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{q(t)}} = \left| \frac{v=t-\tau}{dv=-d\tau} \right| = \frac{1}{\Gamma(1-q(t))} \frac{d}{dt} \int_0^t v^{-q(t)} x(t-v) dv = \\
&= -\frac{A}{\Gamma(1-q(t))} \frac{d}{dt} \int_0^t v^{-q(t)} \cos(\omega(t-v) + \varphi) dv = \\
&= -\frac{A}{\Gamma(1-q(t))} \frac{d}{dt} \int_0^t v^{-q(t)} [\cos(\omega t - \omega v) \cos(\varphi) - \sin(\omega t - \omega v) \sin(\varphi)] dv = \\
&= -\frac{A \cos(\varphi)}{\Gamma(1-q(t))} \frac{d}{dt} \int_0^t v^{-q(t)} \cos(\omega t - \omega v) dv + \frac{A \sin(\varphi)}{\Gamma(1-q(t))} \frac{d}{dt} \int_0^t v^{-q(t)} \sin(\omega t - \omega v) dv = \\
&= -\frac{A \cos(\varphi)}{\Gamma(1-q(t))} \frac{d}{dt} (\cos(\omega t) \int_0^t v^{-q(t)} \cos(\omega v) dv) - \frac{A \cos(\varphi)}{\Gamma(1-q(t))} \frac{d}{dt} (\sin(\omega t) \int_0^t v^{-q(t)} \sin(\omega v) dv) + \\
&+ \frac{A \sin(\varphi)}{\Gamma(1-q(t))} \frac{d}{dt} (\sin(\omega t) \int_0^t v^{-q(t)} \cos(\omega v) dv) - \frac{A \sin(\varphi)}{\Gamma(1-q(t))} \frac{d}{dt} (\cos(\omega t) \int_0^t v^{-q(t)} \sin(\omega v) dv) = \\
&= \frac{A \omega \sin(\omega t + \varphi)}{\Gamma(1-q(t))} \int_0^t v^{-q(t)} \cos(\omega v) dv - \frac{A \omega \cos(\omega t + \varphi)}{\Gamma(1-q(t))} \int_0^t v^{-q(t)} \sin(\omega v) dv - \\
&- \frac{A \cos(\omega t + \varphi)}{\Gamma(1-q(t))} \frac{d}{dt} \int_0^t v^{-q(t)} \cos(\omega v) dv - \frac{A \sin(\omega t + \varphi)}{\Gamma(1-q(t))} \frac{d}{dt} \int_0^t v^{-q(t)} \sin(\omega v) dv \tag{4}
\end{aligned}$$

В случае установившихся колебаний при $t \rightarrow \infty$ интегралы в (4) запишем в виде:

$$I_{\sin} = \int_0^{\infty} v^{-q(t)} \sin(\omega v) dv = \frac{\Gamma(1-q(t))}{\omega^{1-q(t)}} \cos\left(\frac{q(t)\pi}{2}\right) \tag{5}$$

$$I_{\cos} = \int_0^{\infty} v^{-q(t)} \cos(\omega v) dv = \frac{\Gamma(1-q(t))}{\omega^{1-q(t)}} \sin\left(\frac{q(t)\pi}{2}\right). \tag{5.1}$$

Подставив (5.1) и (5) в (4), получим

$$\begin{aligned}
D_{0t}^{q(t)} x(\tau) &= A \omega^{q(t)} \sin(\omega t + \varphi) \sin\left(\frac{q(t)\pi}{2}\right) - A \omega^{q(t)} \cos(\omega t + \varphi) \cos\left(\frac{q(t)\pi}{2}\right) - \\
&- A \frac{dq}{dt} \omega^{q(t)-1} \cos(\omega t + \varphi) \left[(\ln(\omega) - \psi(1-q(t))) \sin\left(\frac{q(t)\pi}{2}\right) + \frac{\pi \cos\left(\frac{q(t)\pi}{2}\right)}{2} \right] - \\
&- A \frac{dq}{dt} \omega^{q(t)-1} \sin(\omega t + \varphi) \left[(\ln(\omega) - \psi(1-q(t))) \cos\left(\frac{q(t)\pi}{2}\right) + \frac{\pi \sin\left(\frac{q(t)\pi}{2}\right)}{2} \right] \tag{6}
\end{aligned}$$

Подставив (3) и (6) в задачу (1), учитывая, что

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi), \quad x''(t) = -A \omega \sin(\omega t + \varphi),$$

$$x''(t) = -A \omega^2 \cos(\omega t + \varphi), \quad \cos^3(\omega t + \varphi) = \frac{3}{4} \cos(\omega t + \varphi) + \frac{1}{4} \cos(3\omega t + 3\varphi),$$

получим уравнение [5]:

$$\ddot{x}(t) + p \dot{x}(t) + s^2 x(t) = \delta \cos(\omega t), \quad x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y_0, \quad (7)$$

где

$$p = -2\lambda \omega^{q(t)-1} \sin\left(\frac{q(t)\pi}{2}\right) + 2\lambda \frac{dq}{dt} \omega^{q(t)-2} \left[(\ln(\omega) - \psi(1-q(t))) \cos\left(\frac{q(t)\pi}{2}\right) + \frac{\pi \sin\left(\frac{q(t)\pi}{2}\right)}{2} \right], \quad (8)$$

$$s^2 = \omega_0^2 - 2\lambda \omega^{q(t)} \cos\left(\frac{q(t)\pi}{2}\right) + \frac{3A^2 b}{4} - 2\lambda \frac{dq}{dt} \omega^{q(t)-1} \left[(\ln(\omega) - \psi(1-q(t))) \sin\left(\frac{q(t)\pi}{2}\right) + \frac{\pi \cos\left(\frac{q(t)\pi}{2}\right)}{2} \right], \quad (9)$$

где $\psi(1-q(t)) = -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1-q(t)} \right)$ – дигамма функция, где $\gamma \approx \frac{1}{2}(\sqrt[3]{10}-1)$ – постоянная Эйлера. На практике достаточно взять $n = 50$.

Уравнение (7) представляет собой классический линейный осциллятор, для которого с помощью метода гармонической линейризации выведены формулы для АЧХ и ФЧХ [5, 17, 18]:

$$A = \frac{\delta}{\sqrt{(s^2 - \omega^2)^2 + p^2 \omega^2}} \quad (10)$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{p\omega}{s^2 - \omega^2}\right). \quad (11)$$

Добротность для дробного осциллятора ДUFFинга можно определить из уравнения (5) по формуле [5, 6, 17]:

$$Q = \frac{s}{p}, \quad (12)$$

где s и p определяются равенствами (8) и (9).

РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Пример 1. Рассмотрим случай:

$$N = 3000, T = 100, \lambda = 0.1, \delta = 1, \quad \omega = 1.5, \omega_0^2 = 1, b = 0.2, x_0 = 0.3, y_0 = 0.5.$$

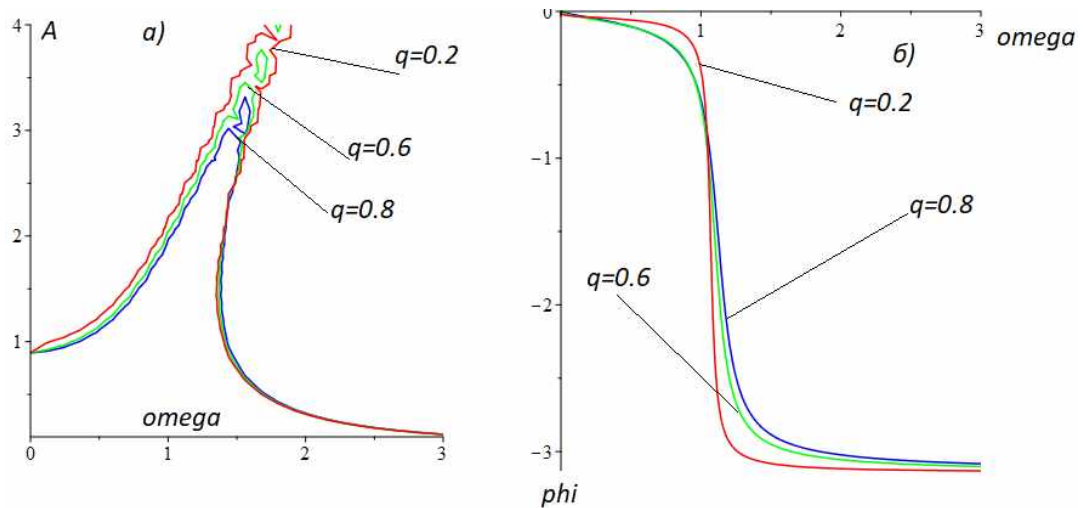


Рис. 1. а) АЧХ и б) ФЧХ при $A=1.5$ для оператора (2) с порядком при $q=0.2, q=0.6$ и $q=0.8$.

На рисунке 1 изображены резонансные кривые АЧХ и ФЧХ, полученные по формулам (10), (11). АЧХ характеризует резонансную кривую, которая имеет резонансную частоту и амплитуду ω_R, A_R , которые можно найти по формуле $\frac{dA}{d\omega} = 0$. ФЧХ или фазовый сдвиг ϕ – запаздывание смещения $x(t)$ по фазе внешней силы. Для осциллятора Дуффинга характерно бистабильное поведение, характеризующееся коэффициентом b . Исходя из резонансных кривых, амплитуда установившихся колебаний при увеличении частоты внешней силы увеличивается до некоторого критического значения (резонансного), а затем идет резкий спад до определенного значения, затем амплитуда уменьшается. При увеличении q резонансная амплитуда уменьшается, а фазовый сдвиг ϕ отличается на небольшую величину, поэтому показатель q фактически не влияет на ФЧХ.

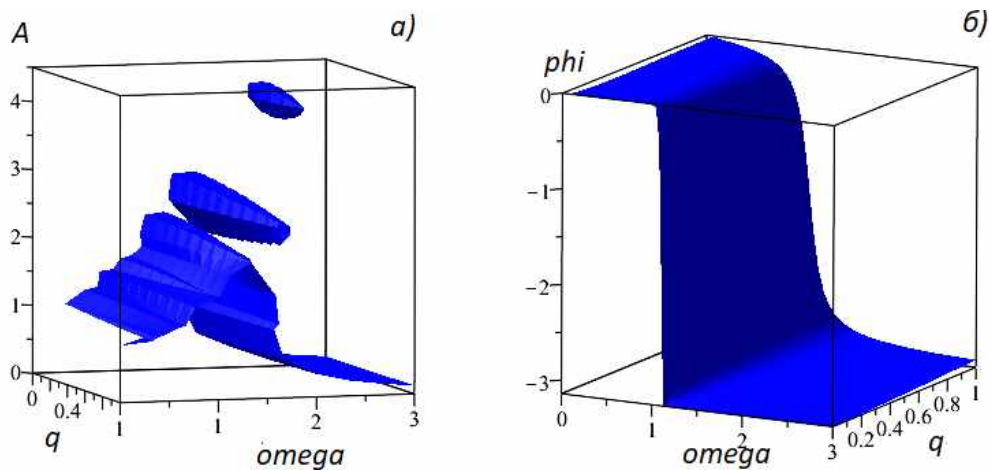


Рис. 2. а) АЧХ и б) ФЧХ при $A=1.5$ для оператора (2) с порядком $q \in [0,1]$

На рисунке 2 даны АЧХ и ФЧХ с теми же параметрами, что и на рисунке 1, но здесь рассматривается зависимость амплитуды и фазы от частоты и показателя производной q , изменяющегося от 0 до 1. Это обобщение рисунка 1.

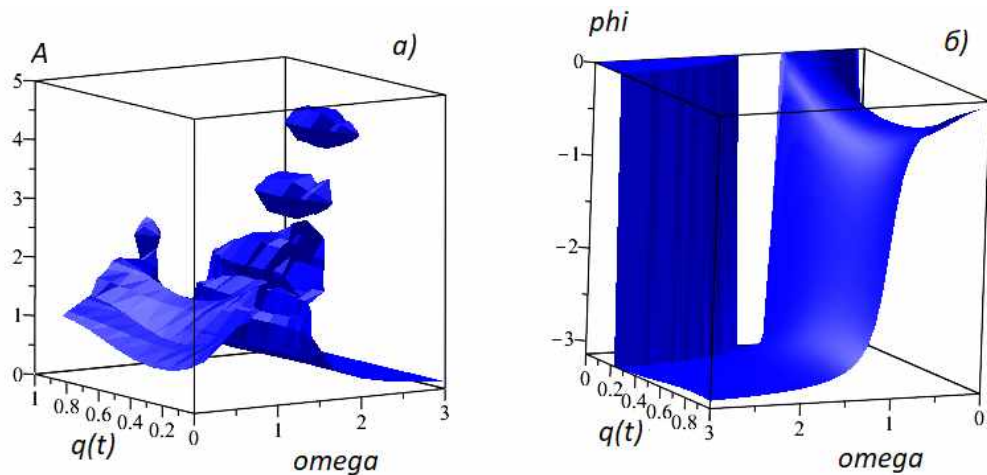


Рис. 3. а) АЧХ и б) ФЧХ при $A=1.5$ для оператора (2) с порядком $q(t) = \sin^2(\omega t), q(t) \in [0,1]$

На рисунке 3 даны АЧХ и ФЧХ с теми же параметрами, что и на рисунке 2, но здесь рассматривается изменение по закону $q(t) = \sin^2(\omega t)$ на промежутке $q(t) \in [0,1]$.

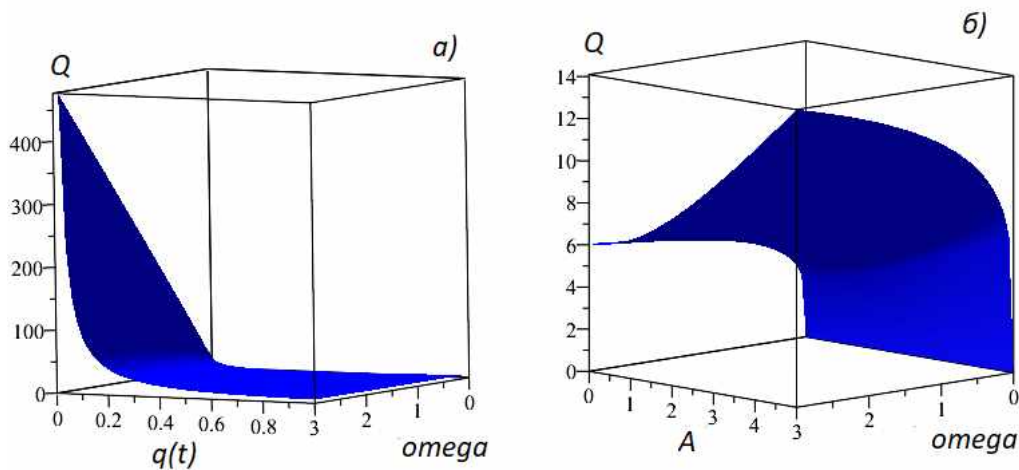


Рис. 4. Добротность: а) $A=1.5$, б) $q(t) = \sin^2(\omega t), t = 97.4$

На рисунке 4 видно, что при уменьшении параметра q добротность увеличивается. Максимальной амплитуде соответствует максимум добротности, а при уменьшении частоты уменьшается добротность. Но сильнее всего добротность зависит от параметра $q(t)$.

Пример 2. Рассмотрим случай:

$$N = 3000, T = 100, \lambda = 0.45, \delta = 0.5, \omega = 0.75, \omega_0^2 = 1.8, b = 0.2, x_0 = 0.3, y_0 = 0.5.$$

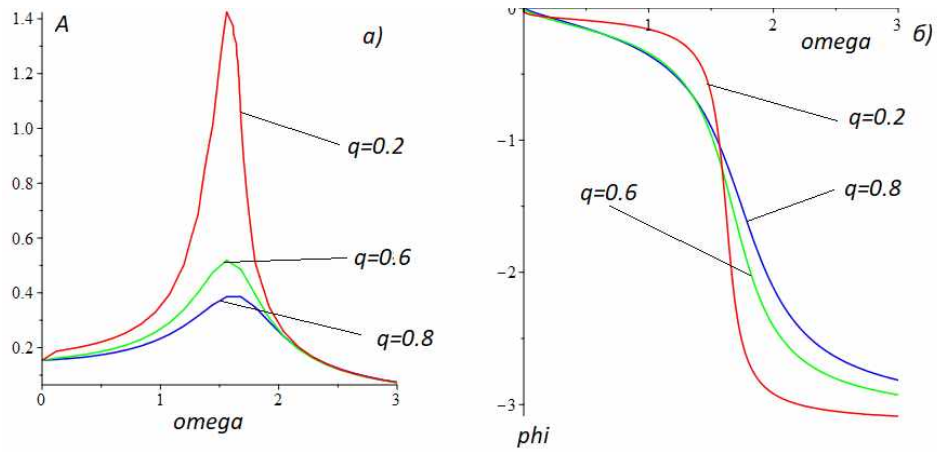


Рис. 5. а) АЧХ и б) ФЧХ при $A=1.5$ для оператора (2) с порядком при $q=0.2$, $q=0.6$ и $q=0.8$

Амплитуда установившихся колебаний при увеличении частоты внешней силы увеличивается до некоторого критического значения, а затем плавно уменьшается. При увеличении q резонансная амплитуда уменьшается, а фазовый сдвиг ϕ изменяется более плавно, при $q=0.2$, когда частота приближается к резонансной, идет резкий скачок фазы, а при $q=0.8$ такого скачка нет.

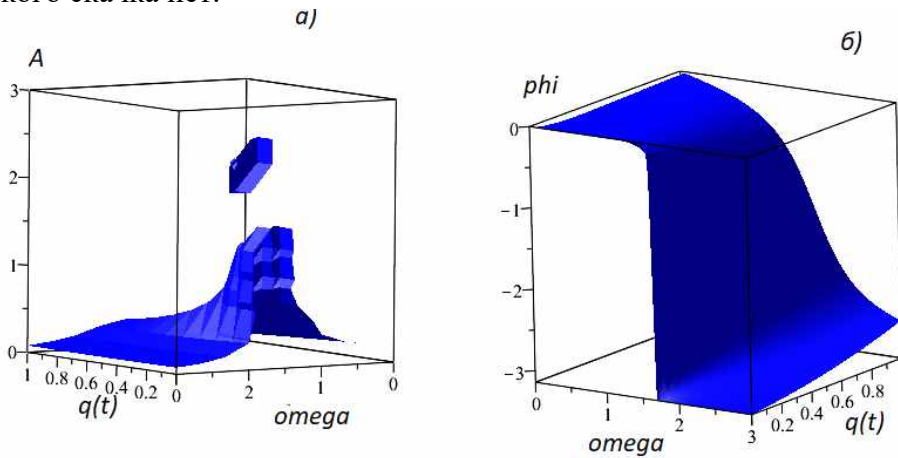


Рис. 6. а) АЧХ и б) ФЧХ при $A=1.5$ для оператора (2) с порядком $q \in [0,1]$

На рисунке 6 даны АЧХ и ФЧХ с теми же параметрами, что и на рисунке 5, но здесь рассматривается зависимость амплитуды и фазы от частоты и показателя производной q , изменяющегося от 0 до 1.

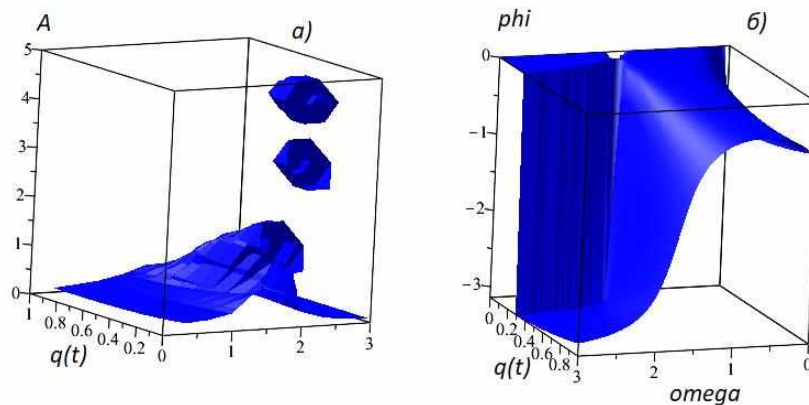


Рис. 7. а) АЧХ и б) ФЧХ при $A=1.5$ для оператора (2) с порядком $q(t) = \sin^2(\omega t)$, $q(t) \in [0,1]$

На рисунке 7 даны АЧХ и ФЧХ с теми же параметрами, что и на рисунке 6, но здесь рассматривается изменение $q(t) = \sin^2(\omega t)$ на промежутке $q(t) \in [0,1]$.

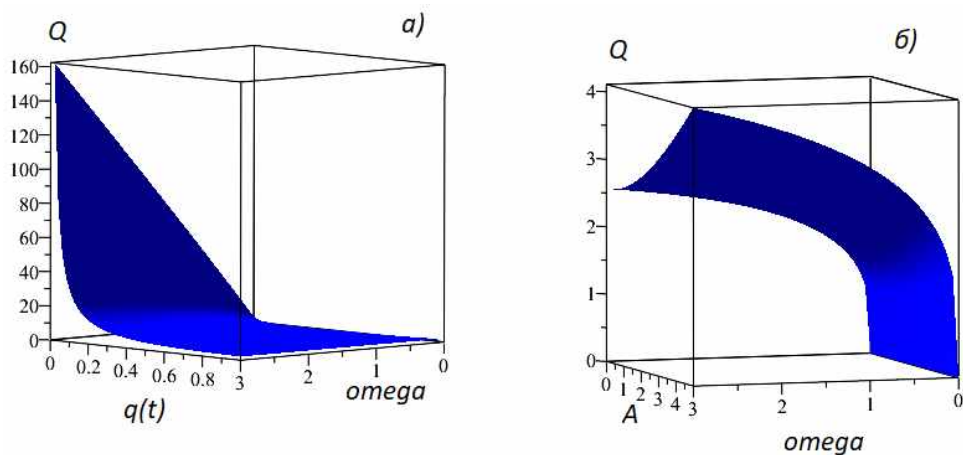


Рис. 8. Добротность: а) $A = 1.5$, б) $q(t) = \sin^2(\omega t), t = 97.4$

На рисунке 8 видно, что при уменьшении параметра $q(t)$ добротность увеличивается. Максимальной амплитуде соответствует максимум добротности, а при уменьшении частоты уменьшается добротность. Но сильнее всего добротность зависит от параметра $q(t)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе предложена математическая модель, которая характеризует осциллятор Дуффинга с производной переменного дробного порядка в смысле Римана-Лиувилля. Были построены резонансные кривые АЧХ и ФЧХ, показывающие зависимость амплитуды и сдвига установившихся колебаний от частоты внешнего воздействия. Также были построены поверхности добротности относительно амплитуды и частоты. Было показано, что при определенных значениях частоты осциллятор Дуффинга демонстрирует бистабильное поведение, другими словами, для него характерны скачки амплитуды. Также показано, что при уменьшении дробного порядка добротность увеличивается, максимальному значению амплитуды соответствует максимальное значение добротности.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Syta et al. Chaotic vibrations of the Duffing system with fractional damping // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2014. vol. 24, no. 1. P. 10-16.
2. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 296 с.
3. Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.
4. Kim V.A. Duffing oscillator with external harmonic action and variable fractional Riemann-Liouville derivative characterizing viscous friction // Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences. 2016. Vol. 13, № 2. P. 46-49.
5. Паровик Р.И. Хаотические и регулярные режимы дробных осцилляторов: монография. Претропавловск-Камчатский: КамГУ им. Витуса Беринга. 2019. 132 с.
6. Паровик Р.И. Математическое моделирование нелокальной колебательной системы Дуффинга с фрактальным трением // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2015. №. 1 (10). С. 18-24.
7. Ким В.А. Модельное уравнение эрмитарного осциллятора Дуффинга с производной переменного дробного порядка Римана-Лиувилля, характеризующей вязкое трение // Новый университет. Технические науки. 2016. № 4-5(50-51). С. 28-31.
8. Ким В.А. Математическая модель нелинейного осциллятора Дуффинга с памятью // Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения: материалы Республиканской научн. конф. с участием зарубеж. ученых. г. Ташкент, 15-17 декабря 2017 г. С. 253-254.

9. *Ким В.А.* Математическое моделирование осциллятора Дуффинга с производной переменного дробного порядка // Математическое моделирование и краевые задачи: м-лы XI всероссийской научной конференции с международным участием. Т. 2, г. Самара, 27-29 мая 2019 г. Самара: СамГТУ, 2019. С. 44-46.
10. *Ким В.А.* Математическое моделирование осциллятора Дуффинга с производной переменного дробного порядка // Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики: материалы V международ. научн. конф. к 80-летию Адама Маремовича Нахушева, г. Нальчик, Кабардино-Балкарская республика, 4-7 декабря 2018 г. Нальчик: Эльбрус, 2018. С. 103-104.
11. *Ким В.А., Паровик Р.И.* Расчет максимальных показателей Ляпунова для колебательной системы Дуффинга со степенной памятью // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2018. № 3(23). С. 98-105.
12. *Ким В.А.* Хаотические режимы осциллятора Дуффинга с производной переменного дробного порядка Римана-Лиувилля // Актуальные проблемы прикладной математики: материалы IV международ. научн. конф., п. Терскол, Кабардино-Балкарская Республика, 22-26 мая 2018 г. Нальчик: Эльбрус, 2018. С. 121-122.
13. *Малкин И.Г.* Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. Изд. 2-е. М., 2004. 248 с.
14. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
15. *Оседец В.И.* Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем // Тр. Московского математического общества. 1968. Т. 19. С. 197-231.
16. *Паровик Р.И.* Конечно-разностные схемы для фрактального осциллятора с переменными дробными порядками // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2015. Т. 11, № 2. С. 88-95.
17. *Паровик Р.И.* Об исследовании устойчивости эргодического осциллятора Ван-дер-Поля // Фундаментальные исследования. 2016. № 3(2). С. 283-287.
18. *Петухов А.А., Ревизников Д.Л.* Алгоритмы численных решений дробно-дифференциальных уравнений // Вестник МАИ. 2009. Т. 16. № 6. С. 228-243.
19. *Gao X., Yu J.* Chaos in the fractional order periodically forced complex Duffing's oscillators // Chaos, Solitons & Fractals. 2005. Vol. 24, № 4. P. 97-104.
20. *Petrás I.* Fractional-Order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation. New York: Springer, 2010. 180 p.
21. *Volterra V.* Leçons sur les fonctions de lignes, professées a la Sorbonne en 1912. Paris: Gauthier-Villars, 1913. 240 p.