УДК 517.44, 517.58
DOI: 10.35330/1991-6639-2019-6-92-102-106

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ХАНКЕЛЯ ФУНКЦИИ ТИПА МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА

Ф.Г. ХУШТОВА

Институт прикладной математики и автоматизации –
филиал ФГБНУ «Федеральный научный центр
«Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук»
360000, КБР, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А
E-mail: ipma@niipma.ru

В работе рассматривается интегральное преобразование Ханкеля функции типа Миттаг-Леффлера со степенным множителем. Результат преобразования найден в терминах специальной функции Фокса. Показывается, что в некоторых частных случаях полученные формулы совпадают с известными табличными формулами.

Ключевые слова: интегральное преобразование Ханкеля, функция типа Миттаг-Леффлера, функция Бесселя, функция Фокса, вырожденная гипергеометрическая функция.

Интегральным преобразованием Ханкеля порядка ν функции $f(t)$ называется интеграл [1]

$$f_\nu^*(p) = H_\nu[f(t)] = \int_0^\infty f(t)\, t\, J_\nu(pt)\, dt\,, \quad \nu \geq -1/2, \quad 0 < p < \infty. \tag{1}$$

Здесь $J_\nu(z)$ – функция Бесселя первого рода порядка ν, определяемая степенным рядом [2, 3]

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}.$$

Преобразование Ханкеля функции $f(t)$ верно для любых точек на интервале $(0, \infty)$, в которых функция $f(t)$ непрерывна или кусочно-непрерывна с конечным числом точек разрыва первого рода, и

$$\int_0^\infty |f(t)|\, t^{1/2}\, dt < \infty.$$

Формула обращения преобразования Ханкеля определяется интегралом

$$f(t) = H_\nu^{-1}[f_\nu^*(p)] = \int_0^\infty f_\nu^*(p)\, p\, J_\nu(pt)\, dp\,, \qquad 0 < t < \infty. \tag{2}$$

Вычислим преобразование Ханкеля функции

$$f(t) = t^{\sigma-2} E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\omega), \ \lambda > 0, \ 0 < \alpha < 2,$$

где

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{\Gamma(\beta + \alpha k)}$$

– функция типа Миттаг-Леффлера [4].

Обозначим

$$I = \int\limits_0^\infty t^{\sigma-1} J_\nu(pt)\, E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\omega)\, dt. \tag{3}$$

Из асимптотических свойств функции Бесселя [2, 3]

$$J_\nu(z) = O(z^\nu),\ \ z \to 0;\ \ J_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left[z - \frac{\pi}{4}(2\nu+1)\right],\quad |z| \to \infty,$$

$|\arg z| < \pi$, и функции типа Миттаг-Леффлера [4]

$$E_{\alpha,\beta}(z) = O(1),\ \ z \to 0;\ E_{\alpha,\beta}(z) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta-\alpha k)} + O(|z|^{-n-1}),\quad |z| \to \infty,$$

$\gamma \le |\arg z| \le \pi$, $\frac{\pi\alpha}{2} < \gamma < \min\{\pi, \pi\alpha\}$, следует, что интеграл (3) сходится при $\sigma < \omega + 1/2$, если $\alpha \ne \beta$ и $\sigma < 2\omega + 1/2$, если $\alpha = \beta$.

Используя известное представление [5, с. 101]

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}{\Gamma(\beta-\alpha s)} (-z)^{-s} ds\,, \tag{4}$$

где $0 < \gamma < 1$, $\alpha < 2$, $|arg(-z)| < \pi(1-\alpha/2)$, из (3) получим

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}{\Gamma(\beta-\alpha s)} \lambda^{-s} ds \int\limits_0^\infty t^{\sigma-\omega s-1} J_\nu(pt) dt.$$

Внутренний интеграл вычисляется по формуле [6, с. 174]

$$\int\limits_0^\infty t^{a-1} J_\nu(ct) dt = 2^{a-1} c^{-a} \frac{\Gamma\left(\frac{a+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\nu-a}{2}\right)},\quad c > 0,\quad -\nu < a < 3/2.$$

Таким образом, получим

$$I = \frac{2^{\sigma-1}}{p^\sigma} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_0-i\infty}^{\gamma_0+i\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{\sigma-\omega s+\nu}{2}\right)\Gamma(1-s)\Gamma(s)}{\Gamma\left(1+\frac{\nu-\sigma+\omega s}{2}\right)\Gamma(\beta-\alpha s)} \left(\frac{2^\omega \lambda}{p^\omega}\right)^{-s} ds,$$

где $0 < \gamma_0 < \min\{1,\ (\sigma+\nu)/\omega\}$, $2n + \omega k + \sigma + \nu \ne 0$, $n, k = 0,1,2,\ldots$ Сделав замену $s = \sigma/\omega - t$, получим

$$I = \frac{\lambda^{-\sigma/\omega}}{2} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1-i\infty}^{\gamma_1+i\infty} \frac{\Gamma(\nu/2+\omega t/2)\Gamma(1-\sigma/\omega+t)\Gamma(\sigma/\omega-t)}{\Gamma(1+\nu/2-\omega t/2)\Gamma(\beta-\alpha\sigma/\omega+\alpha t)} \left(\frac{p^\omega}{2^\omega \lambda}\right)^{-t} dt =$$

$$= \frac{\lambda^{-\sigma/\omega}}{2} H_{2,3}^{2,1}\left[\frac{p^\omega}{2^\omega \lambda}\middle| \begin{matrix} (1-\sigma/\omega\,,1),\quad (\beta-\alpha\sigma/\omega,\alpha) \\ (\nu/2,\omega/2),\quad (1-\sigma/\omega,1),\quad (-\nu/2,\omega/2) \end{matrix}\right], \tag{5}$$

где $H_{2,3}^{2,1}[z|\cdots]$ – функция Фокса [7]. Здесь $-\min\{\nu/\omega, 1-\sigma/\omega\} < \gamma_1 < \sigma/\omega$.

Представление функции (5) в виде степенного ряда имеет вид [7]

$$H_{2,3}^{2,1}\left[z\left|\begin{matrix}(1-\sigma/\omega,1), & (\beta-\alpha\sigma/\omega,\alpha) \\ (\nu/2,\omega/2), & (1-\sigma/\omega,1), & (-\nu/2,\omega/2)\end{matrix}\right.\right]=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\, z^{(\nu+2k)/\omega}+\sum_{k=0}^{\infty}b_k\, z^{k+1-\sigma/\omega},\ \ 0<z<\infty,$$

где

$$a_k=\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\Gamma(1-(\nu+\sigma+2k)/\omega)\Gamma\big((\nu+\sigma+2k)/\omega\big)}{\Gamma(1+\nu+k)\Gamma(\beta-\alpha(\nu+\sigma+2k)/\omega)},$$

$$b_k=\frac{(-1)^k\Gamma\big((\nu+\sigma-\omega)/2-\omega k/2\big)}{\Gamma(1+(\nu-\sigma+\omega)/2+\omega k/2)\Gamma(\beta-\alpha-\alpha k)}.$$

При $\alpha=\beta=1,\omega=2$ имеем

$$I=\int_0^{\infty}t^{\sigma-1}e^{-\lambda t^2}J_\nu(pt)dt.$$

С другой стороны, из (5) имеем, что

$$I=\frac{\lambda^{-\sigma/2}}{2}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2-i\infty}^{\gamma_2+i\infty}\frac{\Gamma(\sigma/2-t)\Gamma(\nu/2+t)}{\Gamma(1+\nu/2-t)}\left(\frac{p^2}{4\lambda}\right)^{-t}dt,$$

где $-\nu/2<\gamma_2<\sigma/2.$ Сделав замену $t=s-\nu/2$, получим

$$I=\frac{p^\nu\lambda^{-(\sigma+\nu)/2}}{2^{1+\nu}}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_3-i\infty}^{\gamma_3+i\infty}\frac{\Gamma\big((\sigma+\nu)/2-s\big)\Gamma(s)}{\Gamma(1+\nu-s)}\left(\frac{p^2}{4\lambda}\right)^{-s}ds,$$

где $0<\gamma_3<(\sigma+\nu)/2.$ Учитывая представление вырожденной гипергеометрической функции (функции Куммера) [5, с. 74]

$$\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c)}\ {}_1F_1(a;c;z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\Gamma(a-s)\Gamma(s)}{\Gamma(c-s)}(-z)^{-s}ds, \tag{6}$$

где $|arg(-z)|<\frac{\pi}{2},\ \ a\neq 0,-1,-2,...$, получим формулу

$$\int_0^{\infty}t^{\sigma-1}e^{-\lambda t^2}J_\nu(pt)dt=\frac{p^\nu\lambda^{-\frac{(\sigma+\nu)}{2}}}{2^{1+\nu}}\frac{\Gamma\left(\frac{\sigma+\nu}{2}\right)}{\Gamma(1+\nu)}\ {}_1F_1\left(\frac{\sigma+\nu}{2};1+\nu;-\frac{p^2}{4\lambda}\right), \tag{7}$$

которая совпадает с приведенной в [6, с. 186].

В случае, когда $\sigma=2-\nu$, из (7) с учетом (6) и (4) имеем

$$\int_0^{\infty}t^{1-\nu}e^{-\lambda t^2}J_\nu(pt)dt=\frac{p^\nu}{2^{1+\nu}\lambda}E_{1,1+\nu}\left(-\frac{p^2}{4\lambda}\right). \tag{8}$$

При $\alpha=\beta=1,\omega=2,\ \sigma=\nu$, из (5) имеем

$$I = \frac{\lambda^{-\nu/2}}{2} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_4 - i\infty}^{\gamma_4 + i\infty} \frac{\Gamma(\nu/2 + t)\Gamma(\nu/2 - t)}{\Gamma(1 + \nu/2 - t)} \left(\frac{p^2}{4\lambda}\right)^{-t} dt\,, \ -\nu/2 < \gamma_4 < \nu/2.$$

Сделав замену $t = \nu/2 + s$, получим

$$I = 2^{\nu-1} p^{-\nu} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_5 - i\infty}^{\gamma_5 + i\infty} \frac{\Gamma(\nu + s)\Gamma(-s)}{\Gamma(1 - s)} \left(\frac{p^2}{4\lambda}\right)^{-s} ds\,, \ \ -\nu < \gamma_5 < 0.$$

Учитывая представление [5, с. 168]

$$\gamma(a, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_6 - i\infty}^{\gamma_6 + i\infty} \frac{\Gamma(a + s)\Gamma(-s)}{\Gamma(1 - s)} z^{-s} ds\,, \ -a < \gamma_6 < 0,$$

где $\gamma(a, z)$ – неполная гамма-функция, приходим к формуле, приведенной в [6, с. 186]

$$\int_0^\infty t^{\nu-1} e^{-\lambda t^2} J_\nu(pt) dt = 2^{\nu-1} p^{-\nu} \gamma\left(\nu, \frac{p^2}{4\lambda}\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. 524 с.

2. *Лебедев Н.Н.* Специальные функции и их приложения. М.: Физматлит, 1963. 360 с.

3. *Кузнецов Д.С.* Специальные функции. М.: Высшая школа, 1965. 424 с.

4. *Джрбашян М.М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.

5. *Маричев О.И.* Метод вычисления интегралов от специальных функций (теория и таблицы формул). Мн.: Наука и техника, 1978. 312 с.

6. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Физматлит, 1983. 752 с.

7. *Kilbas A.A., Saigo M.* H-Transforms. Theory and Applications. Chapman and Hall/CRC. 2004. 389 p.

REFERENCES

1. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. *Integral'nyye preobrazovaniya i operatsionnoye ischisleniye* [Integral transforms and operational calculus]. M.: Fizmatlit, 1961. 524 p.

2. Lebedev N.N. *Spetsial'nye funktsii i ikh prilozheniya* [Special functions and their applications]. M.: Fizmatlit, 1963. 360 p.

3. Kuznetsov D.S. *Spetsial'nye funktsii* [Special functions]. M.: Vysshaya shkola. 1965. 424 p.

4. Dzhrbashyan *M.M. Integral'nye preobrazovaniya i predstavleniya funktsiy v kompleksnoy oblasti* [Integral Transforms and Representations of Functions in the Complex Domain]. M.: Nauka, 1966. 672 p.

5. Marichev O. I. *Metod vychisleniya integralov ot spetsial'nykh funktsiy (teoriya i tablitsy formul)* [Handbook of integral transforms of higher transcendental functions: theory and algorithmic tables]. Mn.: Science and technology, 1978. 312 p.

6. Prudnikov A.P., Brychkov Iu.A., Marichev O.I. *Integraly i ryady. Spetsial'nyye funktsii* [Integrals and Series. Special Functions]. M.: Fizmatlit, 1983. 752 p.

7. *Kilbas A.A., Saigo M.* H-Transforms. Theory and Applications. Chapman and Hall/CRC. 2004. 389 p.

HANKEL INTEGRAL TRANSFORM OF MITTAG-LEFFLER TYPE FUNCTION

F.G. KHUSHTOVA

Institute of Applied Mathematics and Automation –
branch of the FSBSE “Federal Scientific Center
“Kabardin-Balkar Scientific Center of the Russian Academy of Sciences”
360000, KBR, Nalchik, Shortanov street, 89 À
E-mail: ipma@niipma.ru

The paper considers the Hankel integral transform of the Mittag-Leffler type function with a power factor. The result of the transformation is found in terms of the special Fox function. It is shown that in some special cases the formulas obtained coincide with the known tabular formulas.

Keywords: Hankel integral transform, Mittag-Leffler type function, Bessel function, Fox function, degenerate hypergeometric function.

Работа поступила 04.12.2019 г.