*УДК 517.95*
*DOI: 10.35330/1991-6639-2019-5-91-21-29*

# ЗАДАЧА В ПОЛУПОЛОСЕ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРОМ РИМАНА – ЛИУВИЛЛЯ ПО ВРЕМЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

**Л.Л. КАРАШЕВА**

Институт прикладной математики и автоматизации –
филиал ФГБНУ «Федеральный научный центр
«Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук»
36000, КБР, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А
E-mail: ipma@niipma.ru

*В настоящей работе рассматривается неоднородное параболическое уравнение четвертого порядка с дробной производной по временной переменной. Дробная производная понимается в смысле производной Римана–Лиувилля. Для рассматриваемого уравнения исследуется краевая задача в полуполосе. Линейность задачи позволяет редуцировать ее к решению однородного параболического уравнения четвертого порядка с дробной производной по временной переменной с однородным начальным условием и неоднородными краевыми условиями. В работе дано фундаментальное решение параболического уравнения четвертого порядка с дробной производной по временной переменной в терминах функции Райта, построено представление решения поставленной задачи, доказана единственность решения в классе функций быстрого роста.*

**Ключевые слова:** дробная производная Римана – Лиувилля, параболическое уравнение четвертого порядка, задача в полуполосе.

## 1. Введение

Рассмотрим в области $D=\{(x,t):0<x<\infty,0<t<T\}$ уравнение

$$Lu(x,t)=D_{0t}^{\alpha}u(x,t)+\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4}=f(x,t), \tag{1}$$

где $n\in\mathbb{N}$, $D_{0t}^{\alpha}$ – оператор дробного (в смысле Римана – Лиувилля) интегродифференцирования порядка $\alpha$, $0<\alpha\le 1$, определяемый соотношением [1, с. 9]

$$D_{0x}^{\alpha}\varphi(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(-\alpha)}\displaystyle\int_0^x\frac{\varphi(t)dt}{|x-t|^{\alpha+1}},\alpha<0,\\ \varphi(x),\alpha=0,\\ \dfrac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial x^{[\alpha]+1}}D_{0x}^{\alpha-[\alpha]-1}\varphi(t),\alpha>0,\end{cases}$$

где $[\alpha]$ – целая часть числа $\alpha\in\mathbb{R}$, которая удовлетворяет неравенству $[\alpha]\le\alpha\le[\alpha]+1$.

Уравнение (1) с производной второго порядка по переменной *x* называется диффузионно-волновым уравнением. Диффузионно-волновое уравнение широко исследовано. В частности, в работе [2] решена задача Коши для уравнения диффузии дробного порядка с регуляризованной дробной производной. В работе [3] построено фундаментальное решение, дано решение задачи Коши и доказана теорема единственности в классе функций, удовлетворяющих аналогу условия А.Н. Тихонова, для диффузионно-волнового уравнения. В работе [4] с помощью интегральных преобразований найдено решение диффузионно-волнового уравнения четвертого порядка с регуляризованной дробной производной по времени. В работе [5] найдено решение задачи Коши для дробного диффузионно-волнового уравнения. Наиболее полную библиографию можно найти в работах [3, 6, 7, 8].

В полубесконечной области в работе [9] исследована краевая задача для однородного уравнения второго порядка с дробной производной. В работе [10] для уравнения диффузии дробного порядка с постоянными коэффициентами при младших членах решена задача в полуполосе.

В работе [11] построено фундаментальное решение для параболического уравнения порядка *2n*, исследованы его свойства и доказаны теоремы существования и единственности решения задачи Коши.

В данной работе для уравнения (1) построено представление решения в полуполосе и доказана единственность решения в классе функций быстрого роста.

## 2. Постановка задачи

*Регулярным решением* уравнения (1) в области $D$ назовем функцию $u=u(x,t)$, имеющую непрерывные производные по переменной $x$ до четвертого порядка, такую, что $t^{1-\alpha}u(x,t)\in C(\bar{D})$, $u(x,t), \dfrac{\partial u}{\partial x}\in C(D\cup J)$, $J=\{(x,t): x=0, 0<t\le T\}$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}$, $D_{0t}^{\alpha}u\in C(D)$, удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $(x,t)\in D$.

Найти регулярное решение уравнения (1) в области $D$, удовлетворяющее начальному условию

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t)=\tau(x), \qquad x>0 \tag{2}$$

и краевым условиям

$$u(x,t)\big|_{x=0}=\varphi_0(t), \quad \left.\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=0}=\varphi_1(t), \qquad 0<t\le T, \tag{3}$$

где $\tau(x)$, $\varphi_0(t)$ $\varphi_1(t)$ – заданные функции.

В силу линейности задачи (1)-(3) решение можно представить в виде

$$u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t), \tag{4}$$

где $u_1(x,t)$ является решением задачи Коши в области $\Omega=\{(x,t): -\infty<x<\infty, 0<t<T\}$

$$Lu_1(x,t)=D_{0t}^{\alpha}u(x,t)+\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4}= \tilde{f}(x,t), \tag{5}$$

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1}u_1(x,t)=\tilde{\tau}(x), \tag{6}$$

функции $\tilde{f}(x,t)$ и $\tilde{\tau}(x)$ можно определить так, что $\tilde{f}(x,t)=f(x,t)$, $\tilde{\tau}(x)=\tau(x)$ при $x>0$, и продолжаем при $x<0$ так, чтобы выполнялись условия существования решения задачи Коши [11, Теорема 1], в частности,

$$\lim_{|x|\to\infty}\tilde{\tau}(x)\exp\left(-k|x|^{\frac{4}{4-\alpha}}\right)=0,$$

$$\lim_{|x|\to\infty}t^{1-\alpha}\tilde{f}(x,t)\exp\left(-k|x|^{\frac{4}{4-\alpha}}\right)=0.$$

Определив функцию $u_1(x,t)$ [11], находим, что функция $u_2(x,t)$ является решением однородного уравнения (1), удовлетворяющим условиям

$$\lim_{t\to 0}D_{0t}^{\alpha-1}u_2(x,t)=0,$$

$$u_2(x,t)\big|_{x=0}=\varphi_0(t)-u_1(x,t)\big|_{x=0}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=0}=\varphi_1(t)-\left.\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=0}.$$

Поэтому далее будем рассматривать следующую задачу: найти регулярное решение уравнения

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,t)+\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4}=0, \qquad (7)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$\lim_{t\to 0}D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t)=0, \qquad x>0 \qquad (8)$$

и краевым условиям

$$u(x,t)\big|_{x=0}=\varphi_0(t), \qquad \left.\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=0}=\varphi_1(t), \qquad 0<t\le T. \qquad (9)$$

## 3. Вспомогательные утверждения

Рассмотрим функцию

$$\Gamma(x,t)=\frac{t^{\frac{3\alpha}{4}-1}}{4}\Theta_1\left(-|x|t^{-\frac{\alpha}{4}};-\frac{\alpha}{4},\frac{3\alpha}{4}\right), \qquad (10)$$

где

$$\Theta_m(z;\beta,\mu)=e^{-im\frac{\pi}{4}}\phi\left(\beta,\mu;ze^{-i\frac{\pi}{4}}\right)+e^{im\frac{\pi}{4}}\phi\left(\beta,\mu;ze^{i\frac{\pi}{4}}\right), \quad \beta>-1,\ \mu\in\mathbb{C},\ m\in\mathbb{N},$$

$\phi(\beta,\mu;z)=\sum\limits_{p=0}^{\infty}\dfrac{z^p}{p!\Gamma(\beta p+\mu)}$ – функция Райта [12]. Функция $\Gamma(x,t)$ является фундаментальным решением уравнения (1), для нее справедливы следующие выражения:

$$\frac{d^q}{dz^q}\Theta_m(z;\beta,\mu)=\Theta_{m+q}(z;\beta,\mu+q\beta) \qquad (q\in\mathbb{N}, z\in\mathbb{C}); \tag{11}$$

$$\frac{d^4}{dz^4}\Theta_m(z;\beta,\mu)=-\Theta_m(z;\beta,\mu+4\beta); \tag{12}$$

$$D_{0y}^{\gamma}y^{\mu-1}\Theta_m\left(zy^{\beta};\beta,\mu\right)=y^{\mu-\gamma-1}\Theta_m\left(zy^{\beta};\beta,\mu-\gamma\right), \tag{13}$$

при $\beta\in\left(-\frac{1}{2},0\right)$, $\left(1-\frac{1+2\beta}{4}\right)\pi<|\arg z|$, $-\pi<\arg z\le\pi$, $\mu\in\mathbb{R},\gamma\in\mathbb{R}$;

$$\left|\frac{\partial^q}{\partial x^q}D_{0t}^{\gamma}\Gamma(x,t)\right|\le C|x|^{-\theta}\,t^{\alpha\left(1-\frac{1+q-\theta}{4}\right)-\gamma-1}\exp\left(-\sigma|x|^{\frac{4}{4-\alpha}}t^{-\frac{\alpha}{4-\alpha}}\right), \tag{14}$$

где $\sigma<\sigma_0=\left(1-\frac{\alpha}{4}\right)\left(\frac{\alpha}{4}\right)^{\frac{\alpha}{4-\alpha}}\cos\frac{1}{4-\alpha}\pi,\ 0<\alpha<2,\ \gamma\in\mathbb{R},\ q\in\mathbb{N}\cup\{0\},\ \theta\ge0,$ $C$ – некоторая положительная постоянная, не зависящая от $x$ и $t$;

$$\frac{\partial^q}{\partial x^q}D_{0t}^{\gamma}\Gamma(0+,t)-\frac{\partial^q}{\partial x^q}D_{0t}^{\gamma}\Gamma(0-,t)=\begin{cases}0, & \text{при } q=\overline{0,2},\\ \dfrac{t^{-\gamma-1}}{\Gamma(-\gamma)}, & \text{при } q=3,\end{cases} \tag{15}$$

где $q\in\mathbb{N}\cup\{0\},\gamma\in\mathbb{R}$.

## 4. Теорема существования

Пусть функции $t^{1-\alpha}\varphi_0(t),t^{1-\alpha}\varphi_1(t)\in C(\bar{D})$ и $\varphi_1(t)=D_{0t}^{-\mu}\bar{\varphi}_1(t)$, $\varphi_0(t)=D_{0t}^{-\varsigma}\bar{\varphi}_0(t)$, $\varsigma>\frac{\alpha}{2}$, тогда решение задачи (7)-(9) представимо в виде

$$u(x,t)=2\int_0^t\varphi_1(\eta)\frac{\partial}{\partial x}\Gamma(x,t-\eta)d\eta+2\int_0^t\varphi_0(\eta)\frac{\partial^3}{\partial^3 x}\Gamma(x,t-\eta)d\eta. \tag{16}$$

*Доказательство.* Непосредственной подстановкой функции (16) в уравнение (7) с учетом (12), (13) и (14) можно показать, что функция (16) удовлетворяет уравнению (7). Из (13) и (14) очевидно, что функция (16) удовлетворяет однородному условию (8).

Проверим, выполняется ли первое краевое условие из (9):

$$\lim_{x\to0}u(x,t)=2\lim_{x\to0}\int_0^t\varphi_1(\eta)\frac{\partial}{\partial x}\Gamma(x,t-\eta)d\eta+2\lim_{x\to0}\int_0^t\varphi_0(\eta)\frac{\partial^3}{\partial^3 x}\Gamma(x,t-\eta)d\eta.$$

Так как $\varphi_1(t)=D_{0t}^{-\mu}\bar{\varphi}_1(t)$, $\varphi_0(t)=D_{0t}^{-\varsigma}\bar{\varphi}_0(t)$, используя формулу дробного интегрирования по частям [7, с.15], представление (10), перепишем последнее равенство в виде

$$\lim_{x\to0}u(x,t)=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\int_0^t\bar{\varphi}_1(\eta)(t-\eta)^{\frac{\alpha}{2}+\mu-1}\Theta_2\left(-|x|(t-\eta)^{-\frac{\alpha}{4}};-\frac{\alpha}{4},\frac{\alpha}{2}+\mu\right)d\eta-$$

$$-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\int_0^t \overline{\varphi}_0(\eta)(t-\eta)^{\varsigma-1}\Theta_4\left(-|x|(t-\eta)^{-\frac{\alpha}{4}};-\frac{\alpha}{4},\varsigma\right)d\eta.$$

Учитывая оценку (14), в последнем выражении можно перейти к пределу под знаком интеграла, таким образом получим

$$\lim_{x\to 0}u(x,t)=\varphi_0(t).$$

Подставим (16) во второе условие из (9) и рассуждая аналогично, как при проверке первого условия из (9), будем иметь

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^t \varphi_1(\eta)\frac{\partial}{\partial x}\Gamma(x,t-\eta)d\eta+2\lim_{x\to 0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^t \varphi_0(\eta)\frac{\partial^3}{\partial x^3}\Gamma(x,t-\eta)d\eta=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\int_0^t \overline{\varphi}_1(\eta)D_{t\eta}^{-\mu}\frac{\partial^3}{\partial x^3}\Gamma(x,t-\eta)d\eta+2\lim_{x\to 0}\int_0^t \overline{\varphi}_0(\eta)D_{t\eta}^{-\varsigma}\frac{\partial^5}{\partial x^5}\Gamma(x,t-\eta)d\eta=$$

$$=\varphi_1(t)+2\lim_{x\to 0}\int_0^t \overline{\varphi}_0(\eta)D_{t\eta}^{-\varsigma}\frac{\partial^5}{\partial^5 x}\Gamma(x,t-\eta)d\eta.$$

С учетом (14) и если $\varsigma>\dfrac{\alpha}{2}$ второе слагаемое обращается в ноль, следовательно, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\varphi_1(t).$$

Теорема доказана.

## 5. Теорема единственности

В классе функций, удовлетворяющих условию

$$\lim_{x\to+\infty}t^{1-\alpha}u(x,t)\exp\left(-\rho|x|^{\frac{4}{4-\alpha}}\right)=0, \tag{17}$$

где $\rho$ – положительная постоянная, существует не более одного решения задачи (7)-(9).

*Доказательство.* Пусть $h_r(x)$ – функция вида

$$h_r(x)=\begin{cases}1, & x\le r,\\ 0, & x\ge r+1,\end{cases} \tag{18}$$

удовлетворяющая следующим свойствам:

$$0\le h_r(x)\le 1,\quad \left|h_r^{(j)}(x)\right|\le \text{const},$$

$$h_r^{(j)}(x)=0\ \ \textit{при}\ \ x\notin(r,r+1), \tag{19}$$

где $j=\overline{1,4}$, const – постоянная, не зависящая от $x$ и $r$.

Рассмотрим функцию

$$v(x,t,\xi,\eta)=h_r(\xi)D_{t\eta}^{-\chi}G(x,t,\xi,\eta), \quad \chi>0,$$

где

$$G(x,t,\xi,\eta)=\left[\Gamma(x+\xi,t-\eta)-\Gamma(x-\xi,t-\eta)\right].$$

Заметим, что

$$G(x,t,\xi,\eta)\big|_{\xi=0}=0, \qquad \frac{\partial^2 G(x,t,\xi,\eta)}{\partial\xi^2}\Big|_{\xi=0}=0. \tag{20}$$

Пусть $u(x,t)$ – решение однородной задачи (7)-(9), т.е.

$$u(x,t)\big|_{x=0}=0, \qquad \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\Big|_{x=0}=0. \tag{21}$$

Домножим уравнение (7) на функцию $v(x,t,\xi,\eta)$ и проинтегрируем

$$\int_0^t\left(\int_0^{x-\varepsilon}+\int_{x+\varepsilon}^{\infty}\right)v(x,t,\xi,\eta)Lu(\xi,\eta)d\xi d\eta=$$

$$=\int_0^t\left(\int_0^{x-\varepsilon}+\int_{x+\varepsilon}^{\infty}\right)v(x,t,\xi,\eta)D_{0\eta}^{\alpha}u(\xi,\eta)d\xi d\eta+$$

$$+\int_0^t\left(\int_0^{x-\varepsilon}+\int_{x+\varepsilon}^{\infty}\right)v(x,t,\xi,\eta)\frac{\partial^4 u(\xi,\eta)}{\partial\xi^4}d\xi d\eta.$$

Из формулы дробного интегрирования по частям [7, с. 15]

$$\int_a^b g(s)D_{as}^{\mu}h(s)ds=\int_a^b h(s)D_{bs}^{\mu}g(s)ds \quad (\mu\le 0),$$

и в силу (19), а также равенств

$$\frac{\partial^4}{\partial\xi^4}h_r(\xi)D_{t\eta}^{-\chi}G(x,t,\xi,\eta)=\sum_{j=0}^{3}\frac{4!}{j!(4-j)!}\frac{d^{(4-j)}}{d\xi^{(4-j)}}h_r(\xi)\frac{\partial^j}{\partial\xi^j}D_{t\eta}^{-\chi}G(x,t,\xi,\eta)$$

и (см. (20), (21))

$$\sum_{j=0}^{3}(-1)^j\frac{\partial^j\left(D_{t\eta}^{-\chi}G(x,t,\xi,\eta)\right)}{\partial\xi^j}\frac{\partial^{3-j}u(\xi,\eta)}{\partial\xi^{3-j}}\Big|_{\xi=0}=0,$$

получим

$$0=\int_0^t\left(\int_0^{x-\varepsilon}+\int_{x+\varepsilon}^{\infty}\right)v(x,t,\xi,\eta)\left[D_{0\eta}^{\alpha}+\frac{\partial^4}{\partial\xi^4}\right]u(\xi,\eta)d\xi d\eta=$$

$$=\int_0^t\left(\int_0^{x-\varepsilon}+\int_{x+\varepsilon}^{\infty}\right)u(\xi,\eta)h_r(\xi)\left[D_{t\eta}^{\alpha}+\frac{\partial^4}{\partial\xi^4}\right]D_{t\eta}^{-\chi}G(x,t,\xi,\eta)d\xi d\eta+$$

$$+\int_0^t \sum_{j=0}^{3} (-1)^j \frac{\partial^j \left( D_{t\eta}^{-\chi} G(x,t,\xi,\eta) \right)}{\partial \xi^j} \frac{\partial^{3-j} u(\xi,\eta)}{\partial \xi^{3-j}} \Big|_{x+\varepsilon}^{x-\varepsilon} d\eta +$$

$$+\int_0^t \left( \int_0^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{\infty} \right) u(\xi,\eta) \sum_{j=0}^{3} \frac{(4)!}{j!(4-j)!} \frac{d^{(4-j)}}{d\xi^{(4-j)}} h_r(\xi) \frac{\partial^j}{\partial \xi^j} D_{t\eta}^{-\chi} G(x,t,\xi,\eta) d\xi d\eta.$$

Перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$ в последнем равенстве и в силу того, что $u(x,t)$ является решением однородной задачи (7)-(9), и так как

$$\left( D_{t\eta}^{\alpha} + \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} \right) D_{t\eta}^{-\gamma} G(x,t,\xi,\eta) = 0,$$

с учетом равенств (18) и (15) следует, что при $x < r$

$$D_{0t}^{-\chi} u(x,t) = \int_0^t \int_{r<\xi<r+1} u(\xi,\eta) \sum_{j=0}^{3} \frac{4!}{j!(4-j)} \frac{d^{(4-j)}}{d\xi^{(4-j)}} h_r(x) \frac{\partial^j}{\partial \xi^j} G(x,t,\xi,\eta) d\xi d\eta.$$

Из вида функции $G(x,t,\xi,\eta)$ и (14) получим, что

$$| D_{0t}^{-\chi} u(x,t) | \le C \int_0^t \int_{r<\xi<r+1} |u(\xi,\eta)| \exp\left( -\sigma \frac{(x-\xi)^{\frac{4}{4-\alpha}}}{(t-\eta)^{\frac{\alpha}{4-\alpha}}} \right) d\xi d\eta, \qquad (22)$$

где $\sigma < \sigma_0 = \left(1 - \frac{\alpha}{4}\right) \left(\frac{\alpha}{4}\right)^{\frac{\alpha}{4-\alpha}} \cos\frac{1}{4-\alpha}\pi$. Из (17) следует, что при $t < t_0 = \left(\frac{\sigma_0}{\rho}\right)^{\frac{4-\alpha}{\alpha}}$ интеграл в правой части (22) при $r \to \infty$ стремится к нулю. Таким образом, $u(x,t) \equiv 0$ для $x \in (0, +\infty)$ и $t < t_0$.

Далее покажем, что $u(x,t) = 0$ для любого $t > 0$. Предположим, что $u(x,t) \not\equiv 0$ при $t > 0$. Обозначим через $t_1 = \inf\{t : u(x,t) \neq 0\}$. Таким образом, из доказанного следует, что $t_1 \ge t_0$. Рассмотрим функцию $p(x,t) = u(x, t_1 + t)$. Учитывая сделанное предположение и определение $t_1$, для любого $\varepsilon > 0$ найдется значение $x$, такое, что

$$p(x,\varepsilon) \neq 0. \qquad (23)$$

Так как $u(x,t) \equiv 0$ при $0 < t < t_1$, то

$$D_{0t}^{\alpha} u(x,t) = D_{t_1 t}^{\alpha} u(x,t) = D_{0t}^{\alpha} p(x,t).$$

Отсюда следует, что $p(x,t)$ является решением уравнения (7), удовлетворяет начальному условию

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1} p(x,t) = 0, \; 0 < t < t_0$$

и условию (17). Таким образом, из доказанного выше следует, что $p(x,t) \equiv 0$, по крайней мере для $0 < t < t_1$, а это противоречит (23). Следовательно, предположение неверно и $u(x,t) \equiv 0$ для любого $t > 0$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с.
2. *Кочубей А.Н.* Диффузия дробного порядка // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26. № 4. С. 660-670.
3. *Псху А.В.* Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка // Изв. АН. Сер. матем. 2009. Т. 73. № 2. С. 141-182.
4. *Agrawal O.P.* A general solution for a fourth-order fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain // Computers and Structures, 79, 2001. P. 1497-1501.
5. *Ворошилов А.А., Килбас А.А.* Задача Коши для диффузионно-волнового уравнения с частной производной Капуто // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42. № 5. С. 599-609.
6. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations, 204, Elsevier Science, 2006, 540 p.
7. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.
8. *Мамчуев М.О.* Краевые задачи для уравнений и систем уравнений с частными производными дробного порядка // Изд-во КБНЦ РАН. Нальчик, 2013, 200 с.
9. *Геккиева С.Х.* Краевая задача для обобщенного уравнения переноса с дробной производной в полубесконечной области // Известия КБНЦ РАН. 2002. № 1(8). С. 6-8.
10. *Мамчуев М.О.* Краевые задачи для уравнения диффузии дробного порядка с постоянными коэффициентами // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2005. Т. 7. № 2. С. 37-44.
11. *Карашева Л.Л.* Задача Коши для параболического уравнения высокого четного порядка с дробной производной по временной переменной // Сибирские электронные математические известия, 2018. №15. С. 696-706.
12. *Wright E.M.* On the coefficients of power series having exponential singularities // J. London Math. Soc., V. 8, № 29, 1933. P. 71-79.


## REFERENCES


1. Nakhushev A.M. *Drobnoe ischislenie i ego primenenie* [Fractional calculus and its application]. M.: FIZMATLIT, 2003. 272 p.
2. Kochubei A.N. *Diffuziya drobnogo poryadka* [Diffusion of fractional order] // Differ. Equ., 1990. V. 26. № 4. Pp. 485-492.
3. Pskhu A.V. *Fundamental'noye resheniye diffuzionno-volnovogo uravneniya drobnogo poryadka* [The fundamental solution of a diffusion-wave equation of fractional order] // Izv. Math. 2009. V. 73. № 2. Pp. 351-392.
4. Agrawal O.P. A general solution for a fourth-order fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain // Computers and Structures, 79, 2001. Pp. 1497-1501.
5. Voroshilov A.A., Kilbas A.A. *Zadacha Koshi dlya diffuzionno-volnovogo uravneniya s chastnoy proizvodnoy Kaputo* [The Cauchy problem for the diffusion-wave equation with the Caputo partial derivative] // Differ. Equ. 2006. V. 42. №5. Pp. 638-649.
6. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations, 204. Elsevier Science, 2006. 540 p.

7. Pskhu A.V. *Uravneniya v chastnyh proizvodnyh drobnogo poryadka* [Partial differential equations of fractional order]. M.: Nauka, 2005, 199 p.

8. Mamchuev M.O. *Kraevye zadachi dlja uravnenij i sistem uravnenij s chastnymi proizvodnymi drobnogo porjadka* [Boundary-value problems for equations and fractional-order partial differential equations]. *KBSC of RAS Publishing House*, Nalchik, 2013, 200 p.

9. Gekkieva S.H. *Kraevaya zadacha dlya obobshchennogo uravneniya perenosa s drobnoj proizvodnoj v polubeskonechnoj oblasti* [The boundary value problem for the generalized transport equation with a fractional derivative in a semi-infinite region] // News of KBSC of RAS. 2002. № 1(8). Pp. 6-8.

10. Mamchuev M.O. *Kraevye zadachi dlya uravneniya diffuzii drobnogo poryadka s postoyannymi koehfficientami* [Boundary-value problems for a fractional-order diffusion equation with constant coefficients] // *Doklady Adygskoj (Cherkesskoj) Mezhdunarodnoj akademii nauk* [Reports of the Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences]. 2005. T. 7. № 2. Pp. 37-44.

11. Karasheva L.L. *Zadacha Koshi dlja parabolicheskogo uravnenija vysokogo chetnogo porjadka s drobnoj proizvodnoj po vremennoj peremennoj* [The Cauchy problem for a parabolic equation of high even order with a fractional derivative with respect to the time variable] // Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestija, 2018. 15. Pp. 696-706.

12. Wright E.M. On the coefficients of power series having exponential singularities // J. London Math. Soc., 1933. V. 8. № 29. Pp. 71-79.

## A PROBLEM IN THE HALF-STRIP FOR FOURTH ORDER PARABOLIC EQUATION WITH TIME FRACTIONAL RIEMANN-LIOUVILLE DERIVATIVE

**L.L. KARASHEVA**

Institute of Applied Mathematics and Automation –
branch of the FSBSE “Federal Scientific Center
“Kabardin-Balkar Scientific Center of the Russian Academy of Sciences”
360000, KBR, Nalchik, Shortanov street, 89 A
E-mail: ipma@niipma.ru

*In this work a fourth-order inhomogeneous parabolic equation with time fractional derivative is considered. The fractional derivative is understood in the sense of the Riemann-Liouville derivative. The boundary-value problem in the half-strip for equation under consideration is studied. The linearity of the problem allows reducing it to the solution of a homogeneous fourth order parabolic equation with a fractional derivative with respect to the time variable with a homogeneous initial condition and inhomogeneous boundary conditions. In this paper a fundamental solution for fourth-order parabolic equation with time fractional derivative in terms of the Wright function is presented, a representation of the solution of the problem is constructed and uniqueness of the solution in the class of fast growth functions is proved.*

**Keywords:** Riemann – Liouville fractional derivative, fourth order parabolic equation, problem in the half-strip.

*Работа поступила 15.10.2019 г.*