УДК 517.925.4
DOI: 10.35330/1991-6639-2019-5-91-30-37

ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРОМ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Б.И. ЭФЕНДИЕВ

Институт прикладной математики и автоматизации –
филиал ФГБНУ «Федеральный научный центр
«Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук»
360000, КБР, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А
E-mail: ipma@niipma.ru

В данной работе исследуется линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с оператором непрерывно распределенного дифференцирования, и для него изучается двухточечная краевая задача методом функции Грина. Дробное дифференцирование понимается в смысле Римана–Лиувилля. Вводится в рассмотрение специальная функция, в терминах которой строится функция Грина задачи Неймана и доказываются основные свойства. Для рассматриваемого уравнения выписывается решение двухточечной краевой задачи в явном виде при выполнении условия разрешимости. Указываются требования на ядро оператора непрерывно распределенного дифференцирования, гарантирующие выполнение условия разрешимости задачи Неймана.

Ключевые слова: задача Неймана, функция Грина, оператор непрерывно распределенного дифференцирования, оператор дробного дифференцирования Римана–Лиувилля.

1. **Введение**. В интервале $0 < x < l$ рассмотрим уравнение

$$u''(x) - M_{0x}^{0,1}u(x) = f(x), \tag{1}$$

где

$$M_{0x}^{0,1}u(x) = \int\limits_0^1 \mu(s) D_{0x}^s u(x)\, ds$$

– оператор непрерывно распределенного дифференцирования [1], [2],

$$D_{0x}^s u(x) = \frac{1}{\Gamma(-s)} \int_0^x u(t)(x-t)^{-s-1} dt, \quad s < 0;$$
$$D_{0x}^s u(x) = u(x), \quad s = 0, \tag{2}$$
$$D_{0x}^s u(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n D_{0x}^{s-n} u(x), \quad n-1 < s \le n, \; n \in \mathbb{N}$$

– оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана–Лиувилля порядка s [2], [3, с. 28], μ(s), $f(x)$ – заданные функции.

Дифференциальный оператор вида

$$M_{0x}^{\alpha,\beta}u(x) = \int\limits_\alpha^\beta a_\xi(x) D_{0x}^\xi u(x)\, d\xi$$

был впервые введен в работе [1] и назван оператором непрерывного интегро-дифференцирования, а в [2] изучены его свойства, в частности, получена формула непрерывного интегрирования по частям, доказана положительность оператора непрерывного интегрирования.

Уравнение (1) относится к классу обыкновенных непрерывных дифференциальных уравнений [1]. Непрерывные дифференциальные уравнения являются объектом исследования многих отечественных и зарубежных ученых (см., например, А.М. Нахушев [3], А.В. Псху [4, 5], В.Е. Федоров [6], A.N. Kochubei [7] и др.).

В случае μ(s)=1 уравнение (1) было исследовано в работах [8-10], в которых построено фундаментальное решение, выписаны в явном виде решения начальной и краевых задач, найдены соответствующие функции Грина.

В работе [11] для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором $M_{0x}^{0,1}$ в главной части выписано фундаментальное решение и найдено решение задачи Коши.

В данной работе строится функция Грина задачи Неймана для уравнения (1). В терминах функции Грина выписывается решение двухточечной краевой задачи в явном виде.

2. Постановка задачи. *Регулярным решением* уравнения (1) в интервале $]0,l[$ назовем функцию $u=u(x)$, принадлежащую классу $u(x)\in C[0,l]\cap C^2]0,l[$ и удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $x\in]0,l[$.

Задача. *Найти регулярное решение уравнения (1) в интервале* $]0,l[$, *удовлетворяющее условию*

$$u'(0)=u_0,\qquad u'(l)=u_1, \tag{3}$$

где u_0,u_1- *заданные постоянные.*

3. Обозначения и вспомогательные утверждения. Обозначим через $(g*h)(x)=\int_0^x g(x-t)h(t)dt$ – свертка Лапласа функций $g(x)$ и $h(x)$,

$$k_1(x)=\int_0^1 \frac{x^{-s}}{\Gamma(1-s)}\mu(s)ds, \tag{4}$$

$$k(x)=\int_0^x k_1(t)dt=\int_0^1 \frac{x^{1-s}}{\Gamma(2-s)}\mu(s)ds. \tag{5}$$

Рассмотрим функцию

$$W(x)=\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x)=x+(x*k)(x)+(x*k*k)(x)+\ldots, \tag{6}$$

$$w_0(x)=x,\quad w_n(x)=(w_{n-1}*k)(x),\quad n\in N.$$

Лемма 1. *Пусть* $\mu(s)\in L]0,1[$. *Тогда:*

1) *ряд (6), определяющий функцию* $W(x)$, *сходится равномерно по* x,
2) *функция* $W(x)$ *является решением задачи*

$$W''(x)-\int_0^1 \mu(s)D_{0x}^s W(x)\,ds=0,\quad W(0)=0,\quad W'(0)=1, \tag{7}$$

Доказательство. Из соотношения (5) следует оценка для функции $k(x)$

$$|k(x)|\le\int_0^1 |\mu(s)|\frac{(x/l)^{1-s}l^{1-s}}{\Gamma(2-s)}ds\le\int_0^1 |\mu(s)|\frac{l^{1-s}}{\Gamma(2-s)}ds\le C, \tag{8}$$

где $C=C(\mu,l)$- положительная константа.

В силу оценки (8) из формулы (6) имеем неравенства

$$|w_1(x)| \le \frac{Cx^2}{2!}, \quad |w_2(x)| \le \frac{C^2x^3}{3!}, \quad . \; . \; ., \quad |w_n(x)| \le \frac{C^n x^{n+1}}{(n+1)!},$$

из которых следует равномерная сходимость ряда (6).

Из равенства (5) видно, что $k(0) = 0$, в силу которого из формулы (6) непосредственно вытекают равенства

$$W'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n{}'(x) = 1 + (1 * k)(x) + (1 * k * k)(x) + \, . \; . \; ., \tag{9}$$

$$W''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n{}''(x) = k(x) + (k * k)(x) + (k * k * k)(x) + \, . \; . \; ., \tag{10}$$

$$W(0) = 0, \qquad W'(0) = 1, \qquad W''(0) = 0. \tag{11}$$

В силу определения (2) представим оператор $M_{0x}^{0,1}u(x)$ в виде

$$M_{0x}^{0,1}u(x) = \frac{d}{dx}\int_0^1 \mu(s) D_{0x}^{s-1}u(x)\,ds = \frac{d}{dx}\int_0^1 \frac{\mu(s)}{\Gamma(1-s)}\int_0^x u(t)(x-t)^{-s}dt\,ds =$$

$$= \frac{d}{dx}\int_0^x u(t)\int_0^1 \frac{(x-t)^{-s}}{\Gamma(1-s)}\mu(s)ds\,dt = \frac{d}{dx}\int_0^x u(t)\,k_1(x-t)dt = (u * k_1)'(x). \tag{12}$$

Учитывая формулы (6), (9), (11) и $(1 * k_1)(x) = k(x)$, из соотношения (12) получим

$$M_{0x}^{0,1}W(x) = (W * k_1)'(x) = (W' * k_1)(x) =$$

$$= (1 * k_1)(x) + (1 * k_1 * k)(x) + (1 * k_1 * k * k)(x) + \, . \; . \; .$$

$$= k(x) + (k * k)(x) + (k * k * k)(x) + \, . \; . \; . = W''(x),$$

из которого вытекает первое равенство (7).

4. Функция Грина. Рассмотрим функцию двух переменных, определенную в компакте $\overline{\Omega} = [0, l] \times [0, l]$

$$G(x,t) = H(x-t)W(x-t) - \frac{1}{W''(l)}W'(x)W'(l-t). \tag{13}$$

Здесь $H(x)$ – функция Хевисайда.

Определение. *Функцией Грина задачи Неймана для уравнения (1) назовем функцию* $v(x,t)$, *обладающую следующими свойствами:*

1. $v(x,t)$ непрерывна в $\overline{\Omega}$.
2. $v(x,t)$ как функция переменной x является решением задачи

$$v_{xx}(x,t) - \int_0^1 \mu(s) D_{0x}^s v(x,t)\,ds = 0, \qquad v_x(0,t) = 0, \qquad v_x(l,t) = 0, \tag{14}$$

по переменной t является решением задачи

$$v_{tt}(x,t) - \int_0^1 \mu(s) D_{lt}^s v(x,t)\,ds = 0, \qquad v_t(x,0) = 0, \qquad v_t(x,l) = 0. \tag{15}$$

3. При $t = x$ производные $v_x(x,t)$ и $v_t(x,t)$ имеют скачок, равный единице, то есть

$$v_x(x, x+0) - v_x(x, x-0) = -1, \tag{16}$$

$$v_t(x, x+0) - v_t(x, x-0) = 1. \tag{17}$$

Лемма 2. *Пусть выполнено условие* $W''(l) \neq 0$. *Тогда* $G(x,t)$ *является функцией Грина задачи Неймана для уравнения (1).*

Доказательство. Первое свойство следует из непрерывности функций $W(x)$, $W'(x)$ и представления (13).

Равенство (14) доказывается непосредственной подстановкой соотношения (13) в (14) с учетом формул (7) и (11)

$$G_{xx}(x,t) - \int_0^1 \mu(s) D_{tx}^s G(x,t)\, ds =$$

$$= H(x-t)\left[W''(x-t) - \int_0^1 \mu(s) D_{tx}^s W(x-t)\, ds\right] -$$

$$-\frac{W'(l-t)}{W''(l)}\left[W'''(x) - \int_0^1 \mu(s) D_{tx}^s W'(x)\, ds\right] = 0.$$

Аналогично доказывается соотношение (15) в силу равенств (7), (11).

Из соотношений

$$G_x(x,t) = H(x-t)W'(x-t) - \tfrac{1}{W''(l)} W''(x)W'(l-t), \tag{18}$$

$$G_t(x,t) = -H(x-t)W'(x-t) + \tfrac{1}{W''(l)} W'(x)W''(l-t) \tag{19}$$

в силу равенств (11) имеем

$$G_x(0,t) = 0, \quad G_x(l,t) = 0, \quad G_t(x,0) = 0, \quad G_t(x,l) = 0. \tag{20}$$

Подставляя формулу (18) в равенство (16), с учетом того, что $W(x)$ – непрерывная функция, а $H(x)$ – разрывная в нуле функция, в силу соотношений (11) получим

$$G_x(x, x+0) - G_x(x, x-0) = H(-0)W'(0) - \frac{1}{W''(l)} W''(x)W'(l-x) -$$

$$-H(+0)W'(0) - \frac{1}{W''(l)} W''(x)W'(l-x) = -1.$$

Формула (17) доказывается аналогично с помощью соотношения (19).

5. Представление решения.

Теорема. *Пусть* $\mu(s) \in L]0,1[$, $f(x) \in L]0,l[\cap C]0,l[$. *Тогда при выполнении условия* $W''(l) \neq 0$ *единственное регулярное решение задачи (1), (3) существует и имеет вид*

$$u(x) = u_0 G(x,0) - u_1 G(x,l) + \int_0^l G(x,t) f(t) dt. \tag{21}$$

Доказательство. Пусть $u(x)$ − регулярное решение уравнения (1). Умножим обе части уравнения (1) на функцию $G(x,t)$, предварительно поменяв в нем переменную x на t, и проинтегрируем полученное равенство по t в пределах от 0 до l. Тогда имеем

$$\int_0^l G(x,t)u''(t)dt - \int_0^l G(x,t)\int_0^1 \mu(s)D_{0t}^s u(t)\,dsdt = \int_0^l G(x,t)f(t)dt. \tag{22}$$

Проинтегрируем по частям первое слагаемое левой части равенства (22), учитывая, что функция $G_t(x,t)$ имеет разрыв, предварительно разбив промежуток интегрирования на два промежутка от 0 до x и от x до l

$$\int_0^l G(x,t)u''(t)dt = u'(l)G(x,l) - u'(0)G(x,0) - \int_0^x G_t(x,t)u'(t)dt -$$

$$-\int_x^l G_t(x,t)u'(t)dt = u'(l)G(x,l) - u'(0)G(x,0) - u(l)G_t(x,l) +$$

$$+u(0)G_t(x,0) + u(x)[G_t(x,x+0) - G_t(x,x-0)] + \int_0^x G_{tt}(x,t)u(t)dt. \tag{23}$$

В силу формулы дробного интегрирования по частям и равенства

$$D_{lx}^{-s}u'(x) = u(l)\frac{(l-x)^{s-1}}{\Gamma(s)} - D_{lx}^{1-s}u(x), \qquad s \in]0,1[$$

второе слагаемое левой части формулы (22) перепишется в виде

$$\int_0^l G(x,t)\int_0^1 \mu(s)D_{0t}^s u(t)\,dsdt = G(x,l)\int_0^1 \mu(s)D_{0l}^{s-1}u(l)\,ds -$$

$$-G(x,0)\int_0^1 \mu(s)D_{00}^{s-1}u(0)\,ds - \int_0^l G_t(x,t)\int_0^1 \mu(s)D_{0t}^{s-1}u(t)\,dsdt =$$

$$= G(x,l)\int_0^l u(t)k_1(l-t)\,dt - \int_0^l u(t)\int_0^1 \mu(s)D_{lt}^{s-1}G_t(x,t)\,dsdt =$$

$$= \int_0^l u(t)\int_0^1 \mu(s)D_{lt}^s G(x,t)\,dsdt, \tag{24}$$

так как из равенства (12) в силу формулы (5) предел $\lim\limits_{t\to 0}\int_0^1 \mu(s)D_{0t}^{s-1}u(t)\,ds = 0$.

Учитывая формулы (17), (23) и (24), из соотношения (22) получим

$$u(x) + \int_0^l u(t)\left[G_{tt}(x,t) - \int_0^1 \mu(s)D_{lt}^s G(x,t)\,ds\right]dt =$$

$$= u(l)G_t(x,l) - u(0)G_t(x,0) - u'(l)G(x,l) + u'(0)G(x,0) - \int_0^l G(x,t)f(t)dt,$$

из которого с учетом соотношений (3) и (15) получаем формулу (21).

Теперь покажем, что функция $u(x)$, определенная формулой (21), действительно является решением задачи (1), (3). Дифференцируя дважды равенство (21), с учетом формул (17) и (20) будем иметь

$$u'(x) = u_0 G'(x,0) - u_1 G'(x,l) + \int_0^l G_x(x,t) f(t) dt, \tag{25}$$

$$u''(x) = u_0 G''(x,0) - u_1 G''(x,l) + \frac{d}{dx}\left[\int_0^x G_x(x,t) f(t) dt + \int_x^l G_x(x,t) f(t) dt\right]$$

$$= u_0 G''(x,0) - u_1 G''(x,l) + \int_0^l G_{xx}(x,t) f(t) dt + f(x). \tag{26}$$

Далее из равенства (21) получим

$$M_{0x}^{0,1} u(x) = u_0 \int_0^1 \mu(s) D_{0x}^s G'(x,0)\, ds - u_1 \int_0^1 \mu(s) D_{0x}^s G'(x,l)\, ds +$$

$$+ \int_0^l f(t) \int_0^1 \mu(s) D_{0x}^s G(x,t)\, ds dt. \tag{27}$$

Подставляя соотношения (26) и (27) в уравнение (1), в силу равенства (7) имеем тождество, которое доказывает, что функция $u(x)$, определенная формулой (21), действительно удовлетворяет уравнению (1).

С учетом формул (20) из равенства (25) получим, что

$$u'(0) = u_0 G'(0,0) - u_1 G'(0,l) + \int_0^l G_x(0,t) f(t) dt = u_0,$$

$$u'(l) = u_0 G'(l,0) - u_1 G'(l,l) + \int_0^l G_x(l,t) f(t) dt = u_1,$$

где $G'(0,0) = \lim_{x\to 0} G'(x,0) = 1$, $G'(0,l) = \lim_{x\to 0} G'(x,l) = 0$, $G'(l,0) = \lim_{x\to l} G'(x,0) = 0$, $G'(l,l) = \lim_{x\to l} G'(x,l) = -1$.

Выясним, для каких функций $\mu(s)$ выполняется условие разрешимости $W''(l) \neq 0$. Из обозначения (5) видно, что если $\mu(s) \geq 0$, то функция $k(x) \geq 0$. Отсюда из формулы (10) следует, что $W''(l)$ представляет собой знакопостоянный числовой ряд с положительными членами, и поэтому сумма этого ряда отлична от нуля. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нахушев А.М.* О непрерывных дифференциальных уравнениях и их разностных аналогах // Доклады академии наук СССР. 1988. Т. 300. № 4. С. 796-799.

2. *Нахушев А.М.* О положительности операторов непрерывного и дискретного дифференцирования и интегрирования, весьма важных в дробном исчислении и в теории уравнений смешанного типа // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34. № 1. С. 101-109.

3. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

4. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.

5. *Псху А.В.* Краевая задача для дифференциального уравнения с частными производными дробного порядка // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2002. № 1. С. 76-78.

6. *Fedorov V.E., Streletskaya E.M.* Initial-value problems for linear distributed-order differential equations in Banach spaces // Electronic Journal of Differential Equations. 2018. Vol. 2018. № 176. Pp. 1-17.

7. *Kochubei A.N.* Distributed order calculus and equations of ultraslow diffusion // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2008. T. 340. Pp. 252-281.

8. *Эфендиев Б.И.* Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с континуальной производной // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 9. С. 1364-1368.

9. *Эфендиев Б.И.* Задача Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с континуальной производной // Математические заметки. 2015. Т. 97. № 4. С. 620-628.

10. *Эфендиев Б.И.* Задача Неймана для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с континуальной производной // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2006. Т. 8. № 2. С. 87-89.

11. *Эфендиев Б.И.* О фундаментальном решении обыкновенного дифференциального уравнения с оператором непрерывно распределенного порядка // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2018. № 6 (86). С. 48-52.

REFERENCES

1. Nakhushev A.M. *O nepreryvnykh differentsial'nykh uravneniyakh i ikh raznostnykh analogakh* [On continuous differential equations and their difference analogues] // Reports of the USSR Academy of Sciences. 1988. Vol. 300. № 4. Pp. 796-799.

2. Nakhushev A.M. *O polozhitel'nosti operatorov nepreryvnogo i diskretnogo differentsirovaniya i integrirovaniya, ves'ma vazhnykh v drobnom ischislenii i v teorii uravneniy smeshannogo tipa* [On the positivity of continuous and discrete differentiation and integration operators that are very important in fractional calculus and in the theory of equations of mixed type] // Differential Equations. 1998. Vol. 34, № 1. Pp. 101-109.

3. Nakhushev A.M. *Drobnoye ischisleniye i yego primeneniye* [Fractional calculus and its application]. Moscow: Fizmatlit, 2003. 272 p.

4. Pskhu A.V. *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka* [Equations in partial derivative of fractional order]. Moscow: Nauka, 2005. 199 p.

5. Pskhu A.V. *Kraevaya zadacha dlya differentsial'nogo uravneniya s chastnymi proizvodnymi drobnogo poryadka* [The Boundary Value Problem for a Fractional Differential Equation with Partial Derivatives] // *Izvestiya Kabardino-Balkarskogo nauchnogo tsentra RAN* [News of Kabardin-Balkar Scientific Center of the Russian Academy of Sciences]. 2002. № 1. Pp. 76-78.

6. Fedorov V.E., Streletskaya E.M. Initial-value problems for linear distributed-order differential equations in Banach spaces // Electronic Journal of Differential Equations. 2018. Vol. 2018. № 176. Pp. 1-17.

7. Kochubei A.N. Distributed order calculus and equations of ultraslow diffusion // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2008. T. 340. Pp. 252-281.

8. Efendiev B.I. *Zadacha Koshi dlya obyknovennogo differentsial'nogo uravneniya vtorogo poryadka s kontinual'noy proizvodnoy* [Cauchy problem for a second-order ordinary differential equation with a continual derivative] // Differential Equations. 2011. Vol. 47. № 9. Pp. 1364-1368.

9. Efendiev B.I. *Zadacha Dirikhle dlya obyknovennogo differentsial'nogo uravneniya vtorogo poryadka s kontinual'noy proizvodnoy* [Dirichlet problem for a second-order ordinary differential equation with a continual derivative] // Mathematical Notes. 2015. Vol. 97. № 4. Pp. 620-628.

10. Efendiev B.I. *Zadacha Neymana dlya obyknovennogo differentsial'nogo uravneniya vtorogo poryadka s kontinual'noy proizvodnoy* [Neumann problem for a second-order ordinary differential equation with a continual derivative] // *Doklady Adygskoy (Cherkesskoy) Mezhdunarodnoy akademii nauk* [Reports of the International Adyghe (Circassian) Academy of Sciences]. 2006. Vol. 8. № 2. Pp. 87-89.

11. Efendiev B.I. *O fundamental'nom reshenii obyknovennogo differentsial'nogo uravneniya s operatorom nepreryvno raspredelennogo differentsirovaniya* [On the fundamental solution to an ordinary differential equation with a continuous distributed differentiation operator] // *Izvestiya Kabardino-Balkarskogo nauchnogo tsentra RAN* [News of Kabardin-Balkar Scientific Center of the Russian Academy of Sciences]. 2018. № 6. (86). Pp. 48-52.

NEUMANN PROBLEM FOR AN ORDINARY SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION WITH A DISTRIBUTED DIFFERENTIATION OPERATOR

B.I. EFENDIEV

Institute of Applied Mathematics and Automation –
branch of the FSBSE "Federal Scientific Center
"Kabardin-Balkar Scientific Center of the Russian Academy of Sciences"
360000, KBR, Nalchik, Shortanov street, 89 A
E-mail: ipma@niipma.ru

In this paper, we study a linear ordinary second-order differential equation with a continuously distributed differentiation operator and study a two-point boundary-value problem by the Green function method. Fractional differentiation is presented in the sense of the Riemann-Liouville. Green function of the Neumann problem is constructed in term of a special function. The main properties for Green functions are proved. The explicit form of the solution for two-point boundary value problem to the equation under consideration is defined, when the solvability condition is satisfied. Requirements for the kernel of a continuously distributed differentiation operator that guarantee the fulfillment of the solvability condition for the Neumann problem are indicated.

Keywords: Neumann problem, Green's function, operator of continuously distributed differentiation, operator of fractional Riemann-Liouville differentiation.

Работа поступила 10.10.2019 г.