*Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН № 5 (91) 2019*



*УДК 517.91*
*DOI: 10.35330/1991-6639-2019-5-91-15-20*

# ВНУТРЕННЕКРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ ДЖРБАШЯНА – НЕРСЕСЯНА

**Ф.Т. БОГАТЫРЕВА**

Институт прикладной математики и автоматизации –
филиал ФГБНУ «Федеральный научный центр
«Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук»
360000, КБР, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А
E-mail: ipma@niipma.ru

*В работе рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение с оператором дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна. Для исследуемого уравнения решена внутреннекраевая задача с локальным смещением. Условие локального смещения связывает значения искомого решения на концах рассматриваемого интервала со значениями во внутренних точках. При выполнении условия разрешимости найдено явное представление решения исходной задачи, выраженное в терминах специальной функции Миттаг – Леффлера. Найдено условие однозначной разрешимости.*

**Ключевые слова:** внутреннекраевая задача, оператор дробного дифференцирования, оператор Джрбашяна – Нерсесяна, функция Миттаг – Леффлера.

## 1. Введение

Рассмотрим уравнение

$$D_{0x}^{\{\alpha,\beta,\gamma\}}u(x)-\lambda u(x)=f(x),\quad x\in(0,1),\tag{1}$$

где $D_{0x}^{\{\alpha,\beta,\gamma\}}$– оператор дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна порядка $\mu=\alpha+\beta+\gamma-1>0, \lambda=const$.

Оператор дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна, ассоциированный с последовательностью $\{\gamma_0,\gamma_1,\dots,\gamma_n\}$ $(\gamma_k\in(0,1], k=\overline{0,n})$, порядка $\alpha=\sum_{k=0}^{n}\gamma_k-1$ определяется соотношением [1, 2]

$$D_{0x}^{\{\gamma_0,\gamma_1,\dots,\gamma_n\}}u(x)=D_{0x}^{\gamma_n-1}\,D_{0x}^{\gamma_{n-1}}\dots D_{0x}^{\gamma_1}\,D_{0x}^{\gamma_0}\,u(x),\tag{2}$$

где $D_{0x}^{\sigma}$ – оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана – Лиувилля порядка $\sigma$ с началом в точке $x=0$, определяемый следующим образом [3, с. 28]:

$$D_{0x}^{\sigma}\varphi(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(-\sigma)}\displaystyle\int_0^x\frac{\varphi(t)}{|x-t|^{\sigma+1}}\,dt, & \sigma<0,\\ \varphi(x), & \sigma=0,\\ \dfrac{\partial^{[\sigma]+1}}{\partial x^{[\sigma]+1}}D_{0x}^{\partial^{\sigma-[\sigma]-1}}\varphi(t), & \sigma>0,\end{cases}$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера.

Отметим, что частными случаями оператора (2) являются операторы Римана – Лиувилля и Капуто: в случае $\{\gamma_k\}_0^n=\{\alpha-n+1,1,\dots,1\}$ оператор Джрбашяна – Нерсесяна совпадает с производной Римана – Лиувилля, а в случае $\{\gamma_k\}_0^n = \{1, 1, \dots, \alpha - n + 1\}$ – с производной Капуто.

Оператор вида (2) введен в работе [1], где для линейного обыкновенного дифференциального уравнения

$$D_{0x}^{\{\gamma_0,\gamma_1,\dots,\gamma_n\}}u(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)\, D_{0x}^{\{\gamma_0,\gamma_1,\dots,\gamma_{n-k-1}\}}u(x) + a_n(x)u(x) = f(x)$$

доказана теорема существования и единственности решения задачи Коши в интервале $(0, l)$ при условии, что $\gamma_0 + \gamma_n > 1$.

В работе [2] для диффузионно-волнового уравнения с оператором дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна по временной переменной построено фундаментальное решение, дано решение задачи Коши и доказана теорема единственности в классе функций, удовлетворяющих аналогу условия А. Н. Тихонова.

Изучению нелокальной задачи с интегральным смещением для уравнения (1) посвящена работа [4]. Краевая задача с локальным смещением, связывающим значения искомого решения на концах рассматриваемого интервала со значениями во внутренних точках, рассматривалась в работе [5].

## 2. Постановка задачи и формулировка теоремы

*Регулярным решением* уравнения (1) называется функция $u = u(x)$, такая, что $u(x) \in L(0,1) \cap C(0,1]$, $D_{0x}^{\{\alpha,\beta\}}, D_{0x}^{\alpha-1}u(x) \in AC[0,1]$, удовлетворяющая уравнению (1) в интервале $(0,1)$.

**Задача.** *Найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$u(1) = \sum_{i=1}^{m} a_i u(x_i), \quad x_i \in (0,1), \tag{3}$$

$$[D_{0x}^{\alpha-1}u(x)]_{x=0} = \sum_{j=1}^{n} b_j u(\xi_j), \qquad \xi_j \in (0,1), \tag{4}$$

*где $a_i$, $b_j$ – заданные действительные числа.*

Введем следующие обозначения:

$$(g * f)(x) = \int_0^x g(x-t)f(t)dt, \qquad e_{\alpha,\beta}(x) = x^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda x^\alpha),$$

$$K_\mu(t) = e_{\mu,\mu}(1-t) - \sum_{i=1}^{m} a_i\, e_{\mu,\mu}(x_i - t)H(x_i - t), \tag{5}$$

$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}$ – функция типа Миттаг – Леффлера [6], $H(x)$ – функция Хевисайда.

Решение задачи (1), (3), (4) найдем из представления задачи Коши [1]

$$u(x) = \int_0^x f(t)\, e_{\mu,\mu}(x-t)dt + e_{\mu,\alpha}(x)c_1 + e_{\mu,\alpha+\beta}(x)c_2, \tag{6}$$

где

$$\lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1}\, u(x) = c_1, \quad \lim_{x\to 0} D_{0x}^{\beta-1}\, D_{0x}^{\alpha}u(x) = c_2.$$

Удовлетворим (6) условиям (3), (4). Получим:

$$u(1)=\int_0^1 f(t)\,e_{\mu,\mu}(1-t)dt+e_{\mu,\alpha}(1)c_1+e_{\mu,\alpha+\beta}(1)c_2, \tag{7}$$

$$u(x_i)=\int_0^{x_i} f(t)\,e_{\mu,\mu}(x_i-t)dt+e_{\mu,\alpha}(x_i)c_1+e_{\mu,\alpha+\beta}(x_i)c_2, \tag{8}$$

$$u(\xi_j)=\int_0^{\xi_j} f(t)\,e_{\mu,\mu}(\xi_j-t)dt+e_{\mu,\alpha}(\xi_j)c_1+e_{\mu,\alpha+\beta}(\xi_j)c_2, \tag{9}$$

$$D_{0x}^{\alpha-1}u(x)=\int_0^{x} f(t)\,e_{\mu,\beta+\gamma}(x-t)dt+e_{\mu,1}(x)c_1+e_{\mu,\beta+1}(x)c_2. \tag{10}$$

Далее, в силу определения функции типа Миттаг – Леффлера, заметим, что

$$\lim_{x\to 0} e_{\mu,\beta+\gamma}(x)=0,\quad \lim_{x\to 0} e_{\mu,\beta+1}(x)=0,$$

$$\lim_{x\to 0} e_{\mu,1}(x)=\lim_{x\to 0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k x^k}{\Gamma(\mu k+1)}=1+\lim_{x\to 0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k x^k}{\Gamma(\mu k+1)}=1,$$

таким образом получаем

$$\lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1}u(x)=c_1. \tag{11}$$

Теперь, подставив значения (7)-(9), (11) в (3), (4), получим следующую систему:

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^1 f(t)e_{\mu,\mu}(1-t)dt+e_{\mu,\alpha}(1)\mathrm{c}_1+e_{\mu,\alpha+\beta}(1)\mathrm{c}_2=\sum_{i=1}^{m}a_i\int_0^{x_i}f(t)e_{\mu,\mu}(x_i-t)dt+\\ \displaystyle\qquad +\mathrm{c}_1\sum_{i=1}^{m}a_ie_{\mu,\alpha}(x_i)+\mathrm{c}_2\sum_{i=1}^{m}a_ie_{\mu,\alpha+\beta}(x_i),\\ \displaystyle\mathrm{c}_1=\sum_{j=1}^{n}b_j\int_0^{\xi_j}f(t)e_{\mu,\mu}(\xi_j-t)dt+\mathrm{c}_1\sum_{j=1}^{n}b_je_{\mu,\alpha}(\xi_j)+\mathrm{c}_2\sum_{j=1}^{n}b_j\,e_{\mu,\alpha+\beta}(\xi_j).\end{cases}$$

Объединим интегралы справа и слева воспользовавшись функцией Хевисайда. Получим

$$\begin{cases}\displaystyle\mathrm{c}_1\left[e_{\mu,\alpha}(1)-\sum_{i=1}^{m}a_ie_{\mu,\alpha}(x_i)\right]+\mathrm{c}_2\left[e_{\mu,\alpha+\beta}(1)-\sum_{i=1}^{m}a_ie_{\mu,\alpha+\beta}(x_i)\right]=\\ \displaystyle\qquad=-\int_0^1 f(t)\left[e_{\mu,\mu}(1-t)-\sum_{i=1}^{m}a_ie_{\mu,\mu}(x_i-t)\,H(x_i-t)\right]dt,\\ \displaystyle\mathrm{c}_1\left[1-\sum_{j=1}^{n}b_je_{\mu,\alpha}(\xi_j)\right]-\mathrm{c}_2\sum_{j=1}^{n}b_j\,e_{\mu,\alpha+\beta}(\xi_j)=\sum_{j=1}^{n}b_j\int_0^{\xi_j}f(t)e_{\mu,\mu}(\xi_j-t)dt.\end{cases}$$

Или же, с учетом обозначений (5)

$$\begin{cases} \mathrm{c}_1 K_\alpha(0) + \mathrm{c}_2 K_{\alpha+\beta}(0) = -\int_0^1 f(t)\, K_\mu(t) dt, \\ \mathrm{c}_1 \left[1 - \sum_{j=1}^n b_j e_{\mu,\alpha}(\xi_j)\right] - \mathrm{c}_2 \sum_{j=1}^n b_j\, e_{\mu,\alpha+\beta}(\xi_j) = \sum_{j=1}^n b_j \int_0^{\xi_j} f(t) e_{\mu,\mu}(\xi_j - t) dt. \end{cases} \tag{12}$$

Разрешая систему (8) относительно неизвестных $c_1$ и $c_2$, при условии, что $\Delta \neq 0$, получаем, что $\mathrm{c}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $\mathrm{c}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, где

$$\Delta = -K_\alpha(0) \sum_{j=1}^n b_j\, e_{\mu,\alpha+\beta}(\xi_j) - K_{\alpha+\beta}(0) \left[1 - \sum_{j=1}^n b_j e_{\mu,\alpha}(\xi_j)\right],$$

$$\Delta_1 = \int_0^1 f(t) \left[K_\mu(t) \sum_{j=1}^n b_j\, e_{\mu,\alpha+\beta}(\xi_j) - K_{\alpha+\beta}(0) \sum_{j=1}^n b_j\, e_{\mu,\mu}(\xi_j - t) H(\xi_j - t)\right] dt,$$

$$\Delta_2 = \int_0^1 f(t) \left[K_\mu(t) \left[1 - \sum_{j=1}^n b_j e_{\mu,\alpha}(\xi_j)\right] + K_\alpha(0) \sum_{j=1}^n b_j\, e_{\mu,\mu}(\xi_j - t) H(\xi_j - t)\right] dt.$$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема.** *Пусть функция* $f(x) \in C\,(0,1)$ *представима в виде* $f(x) = D_{0x}^{\gamma-1} g(x)$, *где* $g(x) \in L[0,1], \alpha + \gamma > 1$, *и выполняется условие*

$$\Delta \neq 0. \tag{13}$$

*1) Тогда существует регулярное решение задачи (3), (4) для уравнения (1), определяемое равенством*

$$u(x) = \int_0^1 f(t)\, G(x,t)\, dt,$$

*где*

$$G(x,t) = e_{\mu,\mu}(x-t) H(x-t) +$$

$$+ \frac{e_{\mu,\alpha}(x)}{\Delta} \left[K_\mu(t) \sum_{j=1}^n b_j\, e_{\mu,\alpha+\beta}(\xi_j) - K_{\alpha+\beta}(0) \sum_{j=1}^n b_j\, e_{\mu,\mu}(\xi_j - t) H(\xi_j - t)\right] +$$

$$+ \frac{e_{\mu,\alpha+\beta}(x)}{\Delta} \left[K_\mu(t) \left[1 - \sum_{j=1}^n b_j e_{\mu,\alpha}(\xi_j)\right] + K_\alpha(0) \sum_{j=1}^n b_j\, e_{\mu,\mu}(\xi_j - t) H(\xi_j - t)\right].$$

*2) Решение задачи (1), (3), (4) единственно тогда и только тогда, когда выполнено условие (13).*

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Джрбашян М.М., Нерсесян А.Б.* Дробные производные и задачи Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. АН АрмССР. Математика. 1968. С. 3-28.
2. *Псху А.В.* Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка // Изв. РАН, 2009. Т. 73. № 2. 142 с.
3. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. М., 1995.
4. *Богатырева Ф.Т.* Нелокальная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с оператором Джрбашяна – Нерсесяна. Матер. VIII школы молодых ученых "Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики". Нальчик: Хабез, 2010. С. 25-26.
5. *Богатырева Ф.Т.* Краевая задача со смещением для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна // Дифференциальные уравнения. Т. 50. № 2. С. 160-166.
6. *Джрбашян М.М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. Москва: Наука, 1966. 672 с.
7. *Фаддев Д.А.* Лекции по алгебре. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. 416 с.


## REFERENCES


1. Dzhrbashyan M.M., Nersesyan A.B. *Drobnye proizvodnye i zadaha Koshi dlya differentsial'nykh uravneniy drobnogo poryadka* [Fractional derivatives and the Cauchy problem for differential equations of fractional order] // Izv. Akad. nauk Armenian SSR. Matem. 1968. 3:1. Pp. 3-28.
2. Pskhu A.V. *Fundamental'noye resheniye diffuzionno-volnovogo uravneniya drobnogo poryadka* [The fundamental solution of a diffusion-wave equation of fractional order] // Izv. RAN, **7**3:2 (2009). P. 351-392.
3. Nakhushev A. M. *Uravneniia matematicheskoi biologii* [Equations of mathematical biology]. M.: Vysshaia shkola, 1995. 301 p.
4. Bogatyreva F.T. *Nelokal'naya kraevaya zadacha dlya obyknovennogo differencial'nogo uravneniya drobnogo poryadka s operatorom Dzhrbashyana – Nersesyana* [Nonlocal boundary value problem for an ordinary differential equation of fractional order with the Dzhrbashyan – Nersesyan operator]. *Mater. VIII shkoly molodykh uchenykh "Nelokal'nyye krayevyye zadachi i problemy sovremennogo analiza i informatiki"* [Materials of the VIII school of young scientists «Nonlocal boundary value problems and problems of modern analysis and computer science»]. Nalchik: Khabez, 2010. Pp. 25-26.
5. Bogatyreva F.T. *Krayevaya zadacha so smeshcheniyem dlya obyknovennogo differentsial'nogo uravneniya s operatorom differentsirovaniya Dzhrbashyana – Nersesyana // Differentsial'nyye uravneniya* [Boundary value problem with shift for an ordinary differential equation with the Dzhrbashyan – Nersesyan fractional differentiation operator. Differential Equations]. 2014. V. 50. No. 2. Pp. 1-7.
6. Dzhrbashyan M.M. *Integral'nyye preobrazovaniya i predstavleniya funktsiy v kompleksnoy oblasti* [Integral transforms and representation of functions in the complex domain]. Moscow: Nauka, 1966, 672 p.
7. Faddeev D.A. *Lektsii po algebre* [Lectures on algebra]. M.: Nauka, 1984. 416 p.

ВНУТРЕННЕКРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
С ОПЕРАТОРОМ ДЖРБАШЯНА – НЕРСЕСЯНА

# INNER BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR AN ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION WITH THE DZHRBASHYAN – NERSESYAN OPERATOR

**F.T. BOGATYREVA**

Institute of Applied Mathematics and Automation –
branch of the FSBSE "Federal Scientific Center
"Kabardin-Balkar Scientific Center of the Russian Academy of Sciences"
360000, KBR, Nalchik, Shortanov street, 89 "A"
E-mail: ipma@niipma.ru

*The paper considers an ordinary differential equation with the Dzhrbashyan – Nersesyan fractional differentiation operator. For the equation under study, the inner-boundary value problem with local shift has been solved. The local shift condition associates the values of the sought-for solution at the ends of the considered interval with the values at the internal points. Under the solvability condition, an explicit representation of the solution to the original problem is found, expressed in terms of the special Mittag - Leffler function. The condition of unique solvability is found.*

**Keywords:** inner boundary value problem, operator of fractional differentiation, Dzhrbashyan – Nersesyan operator, Mittag – Leffler function.

*Работа поступила 03.10.2019 г.*